ΕΦΗΜΕΡΙΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ Αρ. Φύλλου 1168

8 Ιουνίου 2011

ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ

Αριθμ. 59614/Γ2

Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου.

Η ΥΦΥΠΟΥΡΓΟΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Έχοντας υπόψη:

1. Τις διατάξεις του εδαφ. δ. της παραγράφου 9, του άρθρου 8 του Ν. 1566/85 (ΦΕΚ Α΄ 167), όπως τροποποιήθηκε και ισχύει με τις διατάξεις 1 και 2 του άρθρου 7 του Ν. 2525/97 (ΦΕΚ Α΄188) «Ενιαίο Λύκειο, πρόσβαση των αποφοίτων στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου και άλλες διατάξεις».

2. Τις διατάξεις του άρθρου 90 του κώδικα Νομοθεσίας για την Κυβέρνηση και τα Κυβερνητικά όργανα που κυρώθηκε με το άρθρο πρώτο του Π.Δ. 63/2005 (ΦΕΚ Α΄ 98).

3. Την 1120/Η/7-1-2010 (ΦΕΚ Β1) κοινή Απόφαση του Πρωθυπουργού και της Υπουργού Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων με θέμα: «Καθορισμός αρμοδιοτήτων των Υφυπουργών του Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων».

4. Την εισήγηση του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, όπως αυτή διατυπώθηκε με την αριθμ. 9/2011 πράξη του Τμήματος Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

5. Το γεγονός ότι από την απόφαση αυτή δεν προκαλείται δαπάνη σε βάρος του κρατικού προϋπολογισμού, αποφασίζουμε:

Άρθρο μόνον

Καθορίζουμε το Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου ως εξής:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Α΄ Λυκείου έχει δύο κεντρικούς στόχους. Την ολοκλήρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης που οι μαθητές απέκτησαν στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο και ταυτόχρονα το πέρασμα σε έναν πιο προωθημένο, θεωρητικό μαθηματικό τρόπο σκέψης. Βασικά στοιχεία αυτού του τρόπου σκέψης είναι η «αυστηρή» χρήση μαθηματικής ορολογίας και συμβολισμού, οι ορισμοί των εννοιών και η θεωρητική απόδειξη των ισχυρισμών. Στην προσέγγιση αυτών των στόχων συμβάλλουν:

- Η ένταξη των προϋπαρχουσών μαθηματικών γνώσεων των μαθητών σ' ένα θεωρητικό πλαίσιο, η επέκταση και η εμβάθυνσή τους.
- Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη διάφορων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική).
- Η κατανόηση και χρήση της μαθηματικής γλώσσας, των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, η ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα καθώς και η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επικοινωνούν μαθηματικά.
- Οι εννοιολογικές συνδέσεις εντός των Μαθηματικών αλλά και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών.
- Η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου.
- Η θεώρηση των Μαθηματικών ως πολιτισμικό, ιστορικά εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα.

Η υποβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε απλή εκμάθηση διαδικασιών και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων δεν είναι συμβατή με τους παραπάνω στόχους. Αντίθετα, αναγκαία προϋπόθεση για την προσέγγιση αυτών των στόχων είναι η προσπάθεια για εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στην κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών μέσα από την ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεών τους, καθώς και τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων.

Το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών της Α΄ Λυκείου αποτελείται από τις ενότητες «Άλγεβρα-Στοιχεία Πιθανοτήτων» και «Γεωμετρία».

Η ενότητα «Άλγεβρα-Στοιχεία Πιθανοτήτων» διαπραγματεύεται έννοιες με τις περισσότερες από τις οποίες οι μαθητές έχουν έλθει σε επαφή σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές αντιμετωπίζουν αυτές τις έννοιες σε υψηλότερο επίπεδο, εμβαθύνουν και γενικεύουν. Ειδικότερα, αυτή η ενότητα περιλαμβάνει τα παρακάτω κεφάλαια:

α) Εισαγωγή στη θεωρία συνόλων. Οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων.

β) Στοιχεία πιθανοτήτων. Οι μαθητές έχουν έλθει σε επαφή με την έννοια της πιθανότητας στις προηγούμενες τάξεις με εμπειρικό τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται στην έννοια της πιθανότητας με τον κλασικό ορισμό και εξασκούνται στο βασικό λογισμό πιθανοτήτων με χρήση της θεωρίας συνόλων.

γ) Πραγματικοί αριθμοί. Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν αναπτύξει την έννοια του πραγματικού αριθμού σταδιακά, μέσα από την εισαγωγή των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και των άρρητων αριθμών. Στο κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του.

δ) Εξισώσεις. Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν αντιμετωπίσει εξισώσεις πρώτου βαθμού. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούν συστηματικά και διερευνούν αυτές τις εξισώσεις καθώς και εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

ε) Ανισώσεις. Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν αντιμετωπίσει ανισώσεις πρώτου βαθμού. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούν συστηματικά και διερευνούν αυτές τις ανισώσεις καθώς και ανισώσεις δευτέρου βαθμού.

στ) Πρόοδοι. Οι μαθητές στο Δημοτικό και στο Γυμνασιο έχουν ασχοληθεί με κανονικότητες (patterns). Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν ειδικές περιπτώσεις κανονικότητας ακολουθιών, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο.

ζ) Βασικές έννοιες των συναρτήσεων. Οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει την έννοια της συνάρτησης στο Γυμνάσιο κυρίως με εμπειρικό τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται, μέσω των αντίστοιχων ορισμών, στην έννοια, στα βασικά στοιχεία και στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

η) Μελέτη βασικών συναρτήσεων. Οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις έχουν μελετήσει γραμμικές συναρτήσεις και παραβολές της μορφής $ψ = αx^2$. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούν και άλλες ιδιότητες γραμμικών συναρτήσεων και παραβολών της μορφής $ψ = αx^2$. Επίσης, με αφετηρία την $ψ=αx^2$, κατασκευάζουν και μελετούν τη γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού $f(x)= αx^2 + βx + γ$.

Η ενότητα «Γεωμετρία» αποτελεί την εισαγωγή των μαθητών στη Θεωρητική Γεωμετρία, η οποία είναι το κατεξοχήν πεδίο που μπορεί να μεταφέρει στους μαθητές την ενιαία δομή και τη συνοχή των Μαθηματικών. Μέσα από την αξιωματική της θεμελίωση, τις προτάσεις και τα θεωρήματα που αποδεικνύονται με χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων, η Θεωρητική Γεωμετρία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια αίσθηση της οικοδόμησης μιας μαθηματικής θεωρίας καθώς και της έννοιας της απόδειξης στα Μαθηματικά. Παράλληλα, μπορεί να τους βοηθήσει να αναπτύξουν ικανότητες εύρεσης αποδεικτικών διαδικασιών στην επίλυση προβλημάτων. Στο πλαίσιο της Θεωρητικής Γεωμετρίας οι μαθητές αναγνωρίζουν το ρόλο του σχήματος στη Γεωμετρία ως στοιχείο άρρηκτα συνδεδεμένο με τη γεωμετρική σκέψη.

Στη διδασκαλία της Γεωμετρίας ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας και ιδιαίτερα τα παρεχόμενα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας. Έρευνες έχουν δείξει ότι η χρήση τέτοιων λογισμικών μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να διερευνούν, να δημιουργούν εικασίες και γενικότερα στην κατανόηση της Γεωμετρίας και στην ικανότητα ανάπτυξης μαθηματικών συλλογισμών. Ωστόσο, η επιλογή από τον καθηγητή του τρόπου εφαρμογής των δυναμικών εργαλείων στην τάξη, καθώς και η επιλογή των κατάλληλων μαθηματικών δραστηριοτήτων, καθορίζει την αποτελεσματικότητα αυτών των εργαλείων στη μάθηση.

Ειδικότερα, η ενότητα της Γεωμετρίας περιλαμβάνει τα παρακάτω κεφάλαια:

α) Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του αξιωματικού συστήματος και στη διαφορά της Θεωρητικής από την Πρακτική Γεωμετρία.

β) Βασικά Γεωμετρικά σχήματα. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες και τα θεμελιώδη γεωμετρικά σχήματα τα οποία έχουν συναντήσει σε προηγούμενες τάξεις, εστιάζοντας κυρίως στην απόδειξη των βασικών τους ιδιοτήτων.

γ) Τρίγωνα. Οι μαθητές γνωρίζουν την έννοια του τριγώνου και σχετικές ιδιότητες από προηγούμενες τάξεις. Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουν θεωρητικά αυτές και άλλες ιδιότητες που αφορούν στα τρίγωνα.

δ) Παράλληλες ευθείες. Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί την έννοια της παραλληλίας ευθειών σε προηγούμενες τάξεις. Στο κεφάλαιο αυτό συνδέεται η παραλληλία με το 5ο αίτημα και με βάση αυτό και τα άλλα αιτήματα οι μαθητές αποδεικνύουν τις βασικές σχέσεις παραλλήλων ευθειών.

ε) Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια. Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές διαπραγμαγματεύονται τα διάφορα είδη παραλληλογράμμων και τραπεζίων και μελετούν τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.

στ) Εγγεγραμμένα σχήματα. Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν τις ιδιότητες των τετραπλεύρων που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο και διερευνούν τις ικανές ιδιότητες που επιτρέπουν ένα τετράπλευρο να εγγραφεί σε κύκλο.

Στους πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται οι βασικοί μαθησιακοί στόχοι κάθε κεφαλαίου καθώς και ενδεικτικές δραστηριότητες που μπορούν να βοηθήσουν στην προσέγγιση αυτών των στόχων. Ο εκπαιδευτικός, με βάση τις συνθήκες της κάθε τάξης, θα επιλέξει μεταξύ αυτών αλλά και άλλων δραστηριοτήτων, τις πλέον κατάλληλες για την προσέγγιση των εκάστοτε στόχων.

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Στόχοι	**Θεματικές Ενότητες (Διατιθέμενος χρόνος)**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
	Σύνολα (Σ) (2 ώρες)	
Σ1. Αποφασίζουν αν ένα στοιχείο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και εκφράζουν αυτή τη σχέση συμβολικά. **Σ2**. Αναπαριστούν τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή, περιγραφή στοιχείων, διαγράμματα Venn). **Σ3.** Αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων (και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και»).	Σύνολα.	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.1 Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.2 Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.2 και Δ.3
	Πιθανότητες (Πθ) (6 ώρες)	
Πθ1. Αναγνωρίζουν αν ένα πείραμα είναι πείραμα τύχης **Πθ2**. Προσδιορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και ενδεχόμενα αυτού με διάφορους τρόπους (π.χ. δενδροδιαγράμματα, διαγράμματα Venn, πίνακες διπλής εισόδου). **Πθ3**. Μεταφράζουν διάφορες σχέσεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα. **Πθ4.** Με τη βοήθεια της σχετικής συχνότητας, συνδέουν ένα ενδεχόμενο με έναν αριθμό που αποτελεί μέτρο της «προσδοκίας» πραγματοποίησής του και καταλήγουν στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τον κλασικό ορισμό.	Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα. Η έννοια της πιθανότητας.	Οι μαθητές διαχωρίζουν ένα αιτιοκρατικό πείραμα από ένα πείραμα τύχης (παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.4) Το δενδροδιάγραμμα και ο πίνακας διπλής εισόδου ως τρόπος οργάνωσης ενός πειράματος τύχης (παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.5) Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.6 και Δ.7 Στη διεύθυνση: http://www.shodor.org/interactivate/activities/Coin/ μπορεί ο μαθητής να εμπλακεί διαδραστικά με την έννοια της σχετικής συχνότητας

Πθ5. Αναπαριστούν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων με διαγράμματα Venn, τους αιτιολογούν και τους χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.8
Πραγματικοί αριθμοί (Πρ) (14 ώρες)		
Πρ1. Διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και ταξινομούν με ευχέρεια συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (N, Z,Q, R-Q) που ανήκουν. **Πρ2**. Διερευνούν τις ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών. Αναγνωρίζουν τη σημασία της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» , «και» στις ιδιότητες. Αιτιολογούν με αντιπαραδείγματα γιατί δεν ισχύει η ισοδυναμία σε ορισμένες ιδιότητες. **Πρ3**. Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες αναλογιών στην επίλυση προβλημάτων. **Πρ4.** Εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα κ.λ.π.) για να δείξουν την ισχύ απλών αλγεβρικών προτάσεων.	Οι πράξεις και οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. (5 ώρες)	Γιατί ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος; Συζητούν το νόημα της συνεπαγωγής ($α=β \Rightarrow α^2=β^2$)και διερευνούν την ισχύ του αντιστρόφου. [π.χ. $α^2=β^2 \Rightarrow (α=β$ ή $α=-β)$, ή αντιπαράδειγμα για α=2, β=-2] Προβληματίζονται σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους αποδεικνύεται ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει.
Πρ5. Διερευνούν την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών σύνολα που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις και τα συμβολίζουν χρησιμοποιώντας διαστήματα.	Διάταξη των πραγματικών αριθμών. (4 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.9

Πρ6. Διερευνούν και προσδιορίζουν ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας.		Αποδεικνύουν με κατάλληλο αντιπαράδειγμα. ότι η διαίρεση κατά μέλη ανισοτήτων (με θετικούς όρους) δεν ισχύει. Διαπιστώνουν τη σημασία του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη μαθηματικών ισχυρισμών.
Πρ7. Χρησιμοποιούν την έννοια της διάταξης των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων της για να επιλύσουν προβλήματα αναπτύσσοντας κατάλληλες στρατηγικές.		
Πρ8. Ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή συνδέοντας τη με τη γεωμετρική της ερμηνεία.	Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. (3 ώρες)	
Πρ9. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής, τις ερμηνεύουν γεωμετρικά και τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.10
Πρ10. Ορίζουν τη ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού και μέσω αυτής τη δύναμη θετικού αριθμού με ρητό εκθέτη.	Ρίζες πραγματικών αριθμών. (2ώρες)	
Πρ11. Αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν τις βασικές ιδιότητες των ριζών και δυνάμεων.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.11
Εξισώσεις (Ε) (9 ώρες)		
Ε1. Διερευνούν τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης αχ+β=0.	Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού. Η εξίσωση $χ^ν$=α. (4ώρες)	
Ε2. Αναγνωρίζουν το ρόλο της παραμέτρου σε μία παραμετρική εξίσωση 1^{ου} βαθμού.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.12
Ε3. Επιλύουν απλές παραμετρικές εξισώσεις (με μία παράμετρο) 1^{ου} βαθμού.		

Ε4. Επιλύουν εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού (π.χ. ρητές, με απόλυτες τιμές) εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων και της ισότητας των πραγματικών αριθμών. Διερευνούν και επιλύουν εξισώσεις της μορφής $χ^ν$=α. **Ε5.** Διερευνούν τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης $αχ^2+βχ+γ=0$ και καταλήγουν σε συμπεράσματα τα οποία χρησιμοποιούν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. **Ε6.** Προσδιορίζουν τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και τους χρησιμοποιούν για να κατασκευάσουν εξισώσεις των οποίων οι ρίζες ικανοποιούν δεδομένες σχέσεις. **Ε7.** Επιλύουν εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού.	Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού. (5 ώρες)	Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{\omega \quad +5}{\omega^2-\omega}-\frac{\omega+5}{\omega-1}=\frac{1}{\omega}$ Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.13 και Δ.14
	Ανισώσεις (Α) (6 ώρες)	
Α1. Επιλύουν ανισώσεις 1^{ου} βαθμού και προβλήματα που ανάγονται σε ανισώσεις 1^{ου} βαθμού. **Α2.** Διερευνούν την παραγοντοποίηση τριωνύμου και καταλήγουν σε συμπεράσματα τα οποία χρησιμοποιούν για να προσδιορίσουν το πρόσημο των τιμών του. **Α3.** Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση ανισώσεων 2^{ου} βαθμού.	Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού. (2 ώρες) Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού. (4 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.15
	Πρόοδοι (Π) (7 ώρες)	
Π1. Αναγνωρίζουν την ακολουθία ως αντιστοιχία των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και χρησιμοποιούν τον κατάλληλο συμβολισμό.	Ακολουθίες. (1 ώρα)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.16

Π2. Υπολογίζουν όρους ακολουθίας που εκφράζεται με γενικό ή αναδρομικό τύπο.		
Π3. Διερευνούν ακολουθίες με σταθερή διαφορά διαδοχικών όρων και ορίζουν την αριθμητική πρόοδο.	Αριθμητική πρόοδος. (4 ώρες)	
Π4. Εξετάζουν αν μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος τεκμηριώνοντας το συλλογισμό τους.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.17 και Δ.18
Π5. Υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας αριθμητικής προόδου.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.17 και Δ.18
Π6. Διερευνούν, προσδιορίζουν και εφαρμόζουν τη σχέση τριών διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου .		
Π7. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση του ν-οστού όρου και του αθροίσματος ν-πρώτων όρων αριθμητικής προόδου.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.17 και Δ.18
Π8. Διερευνούν ακολουθίες με σταθερό λόγο διαδοχικών όρων και ορίζουν τη γεωμετρική πρόοδο.	Γεωμετρική πρόοδος. (4 ώρες)	
Π9. Εξετάζουν αν μια ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος τεκμηριώνοντας το συλλογισμό τους.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.19, Δ.20 και Δ.21
Π10. Υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.19, Δ.20 και Δ.21
Π11. Διερευνούν, προσδιορίζουν και εφαρμόζουν τη σχέση τριών διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου .		
Π12. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση του ν-οστού όρου και του αθροίσματος ν-πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.19, Δ.20 και Δ.21

Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων (ΒΣ) (6 ώρες)		
ΒΣ1. Εισάγονται στην έννοια της συνάρτησης μέσα από πραγματικές καταστάσεις αντιστοίχησης διαφόρων ειδών ώστε να αποκτήσει νόημα ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης.	Η έννοια της συνάρτησης. (3 ώρες)	
ΒΣ2. Επιχειρηματολογούν αν μία αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι και εξοικειώνονται με το συμβολισμό και την ορολογία.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.22 και Δ.23
ΒΣ3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια συναρτήσεων (και δίκλαδων).		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.15
ΒΣ4. Διερευνούν αν μια γραμμή σε σύστημα συντεταγμένων είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.	Γραφική παράσταση συνάρτησης. (3 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.24
ΒΣ5. Συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση).		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.25
ΒΣ6. Ερμηνεύουν μία δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.26
ΒΣ7. Προσδιορίζουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τους άξονες και τη σχετική της θέση με το χ΄χ, επιλύοντας εξισώσεις και ανισώσεις.		
Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων (ΜΣ) (8 ώρες)		
ΜΣ1. Διερευνούν τη γραφική παράσταση της $f(χ)=αχ+β$ για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων α και β.	Η συνάρτηση $f(χ)=αχ+β$. (2 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.27
ΜΣ2. Καταλήγουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία και τα εκφράζουν συμβολικά.		
ΜΣ3. Χρησιμοποιούν την $f(χ)=αχ+β$ στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.	Μελέτη της συνάρτησης $f(χ)=αχ^2$. (2ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.28

ΜΣ4. Αναπαριστούν γραφικά και διερευνούν τις συναρτήσεις g(χ)= $χ^2$ και h(χ)= - $χ^2$ ως προς τη μονοτονία. Καταλήγουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στα ακρότατα και στις συμμετρίες και τα εκφράζουν συμβολικά. **ΜΣ5.** Γενικεύουν τα συμπεράσματά τους για τη συνάρτηση f(χ)=α$χ^2$. **ΜΣ6**. Αναπαριστούν και διερευνούν τη γραφική παράσταση συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής f(χ)=α$χ^2$+βχ+γ. **ΜΣ7.** Χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ)=α$χ^2$+βχ+γ στη διερεύνηση των ριζών και του προσήμου του τριωνύμου α$χ^2$+βχ+γ, α≠0.	Μελέτη της συνάρτησης f(χ)=α$χ^2$+βχ+γ. (4 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.29 Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.29 Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.30 και Δ.31 Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.32

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δ.1 (αντιστοιχεί στο στόχο Σ1)

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα σύμβολα $\in$ και $\notin$, αν ο κάθε αριθμός ανήκει ή δεν ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-5,5				
π				
$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$\sqrt{144}$				
$-\frac{13}{3}$				
$\frac{40}{5}$				
$\sqrt{2}$				
$0,\overline{3}$				
-4				

Δ.2 (αντιστοιχεί στους στόχους Σ2 και Σ3)

Έστω Ω={1,2,3,...,10} ένα βασικό σύνολο και τρία υποσύνολα αυτού Α={1,2,4,7,8}, Β={3,4,8,10} και Γ={2,4,5,10}

α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β και Γ με διάγραμμα Venn.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους καθώς και με διαγράμματα Venn τα σύνολα:

i) Α∪Β ii) Β∩Γ iii) Α∪(Β∩Γ) iv) (Α∩Β)∪Γ v) Α∩Β∩Γ

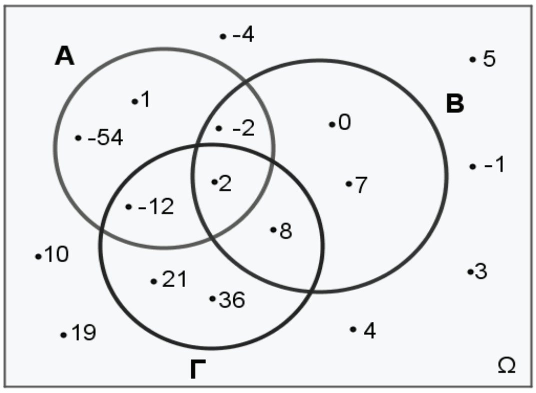
Δ.3 (αντιστοιχεί στους στόχους Σ2 και Σ3)

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ένα βασικό σύνολο Ω και τρία υποσύνολά του Α, Β και Γ.

α) Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων των συνόλων Α, Β και Γ;

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

i) Α∪Β ii) Β∩Γ iii) Α∪(Β∩Γ) iv) Α∩Β∩Γ v) Α΄



Δ.4 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ1)

Ποια από τα παρακάτω πειράματα είναι πειράματα τύχης; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών εκλείψεων του ήλιου.

β) το πλήθος των παιδιών που έχει μία οικογένεια.

γ) το πλήθος των πελατών ενός εμπορικού καταστήματος μια συγκεκριμένη ημέρα.

δ) ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σε ένα αεροδρόμιο εντός καθορισμένου χρονικού διαστήματος.

ε) ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει ένα κινητό γνωστή απόσταση s με σταθερή ταχύτητα v.

ζ) ο τόκος που θα λάβουμε για καταθέσεις ύψους α με προκαθορισμένο επιτόκιο β.

Δ.5 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ2)

Δύο φίλοι παίζουν το γνωστό παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί». Με χρήση δενδροδιαγράμματος ή πίνακα διπλής εισόδου να προσδιορίσετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος και να δημιουργήσετε έτσι το δειγματικό χώρο του πειράματος αυτού. Να προσδιορίσετε το ενδεχόμενο «ισοπαλία».

Δ.6 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ3)

Σε μια ομάδα 20 ατόμων, 4 από τις 7 γυναίκες και 2 από τους 13 άνδρες φορούν γυαλιά. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

Α. να είναι γυναίκα ή να φοράει γυαλιά.

Β. να μην είναι γυναίκα και να φοράει γυαλιά.

Δ.7 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ3)

Από τους μαθητές ενός λυκείου κάποιοι μιλούν πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια εκδήλωση του τμήματος Γαλλικής Φιλολογίας. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα Α: «ο μαθητής να είναι κορίτσι» και Β: «ο μαθητής μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα», να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) Α∪Β ii) Α∩Β iii) Β-Α iv) Α-Β v) Α΄ vi) Α΄∪Β

Δ.8 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ5)

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 32 μαθητές συμμετέχουν σε μια θεατρική ομάδα, 28 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει σε μια τουλάχιστον από τις δυο ομάδες;

β) να συμμετέχει μόνο σε μία από τις δυο ομάδες;

γ) να μη συμμετέχει σε καμία από τις δυο ομάδες;

Δ.9 (αντιστοιχεί στο στόχο Πρ5)

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

α) Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{3}{8}$ και το $\frac{5}{8}$;

β) Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στον 1,2 και στον 1,3; Αν ναι, γράψτε έναν.

γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός α μεγαλύτερος του $\frac{5}{8}$ με την ιδιότητα: «ανάμεσα στον $\frac{5}{8}$ και τον α να μην υπάρχει άλλος αριθμός»;

δ) Υπάρχει ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

ε) Υπάρχει ο επόμενος πραγματικός αριθμός του 24,1; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

στ) Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στον 0,99... και στον 1;. Ανάμεσα στον 0,899... και στον 0,9; Τι παρατηρείτε;

Δ.10 (αντιστοιχεί στο στόχο Πρ9)

Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το σφάλμα της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του δίσκου, τότε:

α) Να παραστήσετε την παραπάνω παραδοχή στην αριθμογραμμή.

β) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόλυτης τιμής.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της D.

Δ.11 (αντιστοιχεί στο στόχο Πρ11)

Δίνεται η παράσταση:

$$\left(\sqrt[6]{2^3}+4\right)\cdot\left(\sqrt[6]{2^3}-4\right)$$

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση υπολογιστή τσέπης.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώνας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ) Να συγκρίνετε τις δυο μεθόδους ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος.

Δ.12 (αντιστοιχεί στο στόχο Ε2)

Ο τιμοκατάλογος των ΤΑΧΙ στην Αθήνα περιλαμβάνει 1,19€ για την εκκίνηση και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, ενώ στα νησιά του Αιγαίου περιλαμβάνει 1,14€ για την εκκίνηση και 0,65€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.

α) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με ΤΑΧΙ ένας επιβάτης στην Αθήνα, αν διαθέτει 10€.

β) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με ΤΑΧΙ ένας επιβάτης σε νησί του Αιγαίου, αν διαθέτει 10€.

γ) Αν στους νομούς της Θεσσαλίας η χρέωση για το ΤΑΧΙ περιλαμβάνει 2λ€ για την εκκίνηση και λ€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, να βρείτε σε σχέση με το λ την απόσταση που μπορεί να διανύσει ένας επιβάτης αν διαθέτει 10 €. Αν στο νομό Λαρίσης η χρέωση ανά χιλιόμετρο διαδρομής είναι 0,60€ και στο νομό Μαγνησίας 0,62€, να υπολογίσετε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με ΤΑΧΙ ένας επιβάτης που διαθέτει 10€.

Δ.13 (αντιστοιχεί στο στόχο Ε7)

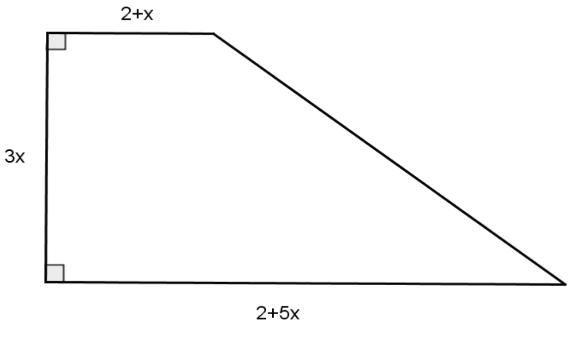
Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δυο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

Δ.14 (αντιστοιχεί στο στόχο Ε7)

Ένας μαραθωνοδρόμος διάνυσε απόσταση 42km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν $1\frac{km}{h}$ μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε $\frac{1}{10}$ της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;

Δ.15 (αντιστοιχεί στους στόχους Α3 και ΒΣ3)

Στο παρακάτω τραπέζιο (οι πλευρές του είναι σε m):



α) Να εκφράσετε την περίμετρό του Π ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Π(x);

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του Ε ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x);

γ) Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του x, αν η περίμετρος του τραπεζίου είναι τουλάχιστον 39m και το εμβαδόν του το πολύ 99m^2.

Δ.16 (αντιστοιχεί στο στόχο Π1)

Η ακολουθία 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,... ονομάζεται ακολουθία Fibonacci (Leonardo di Pisa (Fibonacci), 1175-1250).

α) Ας αντιστοιχίσουμε, λοιπόν, τους φυσικούς αριθμούς ν με τους όρους της παραπάνω ακολουθίας $x_ν$, συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_ν$	0	1									

β) Παρατηρήστε πως προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας από τον x3 και μετά.

Μπορείτε να υπολογίσετε το 12^ο όρο της ακολουθίας; Ποιες πληροφορίες χρειάζονται για τον υπολογισμό του 12^{ου} όρου;

γ) Ας προσπαθήσουμε να σκεφτούμε έναν κανόνα που θα μας βοηθά να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο της παραπάνω ακολουθίας.

Δ.17 (αντιστοιχεί στους στόχους Π4, Π5 και Π7)

Δέκα αδέλφια μοιράζονται 100 ευρώ. Κάθε αδελφός παίρνει α ευρώ περισσότερα από τον αμέσως μικρότερό του. Ο 7^{ος} στη σειρά αδελφός παίρνει 7 ευρώ.

α) Αποτελούν τα χρήματα που θα πάρουν τα αδέλφια όρους αριθμητικής προόδου;

Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Πόσα χρήματα παίρνει ο κάθε αδελφός;

Δ.18 (αντιστοιχεί στους στόχους Π4, Π5 και Π7)

Ένα έλκηθρο αφήνεται ελεύθερο να κυλίσει σε μια χιονισμένη πλαγιά. Το πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησής του διανύει απόσταση 3cm, το δεύτερο δευτερόλεπτο διανύει απόσταση 5cm, το τρίτο δευτερόλεπτο 7cm, το τέταρτο δευτερόλεπτο 9cm κ.ο.κ. Η κίνηση θα διαρκέσει 60 δευτερόλεπτα.

α) Πόσο διάστημα θα διανύσει στο 20-στό δευτερόλεπτο της κίνησής του;

β) Αν τοποθετήσουμε τα διαστήματα που έχει διανύσει το έλκηθρο στα πρώτα 20 δευτερόλεπτα της κίνησής του με τον παρακάτω τρόπο:

3 5 7 9 11 13 ....31 33 35 37 39 41

41 39 37 35 33 31....................................... 13 11 9 7 5 3

Ποιο είναι το άθροισμα της κάθε στήλης; Μπορείτε να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που θα έχει διανύσει το έλκηθρο στο διάστημα των πρώτων 20 δευτερολέπτων με ένα γρήγορο τρόπο;

γ) Ποιο είναι το διάστημα που θα διανύσει στο ν-οστό δευτερόλεπτο της κίνησής του, με ν≤60 ;

δ) Να αποδείξετε ότι η συνολική απόσταση που θα διανύσει το έλκηθρο στο διάστημα των ν πρώτων δευτερολέπτων, με ν≤60, είναι: ν·(ν+2) cm.

Δ.19 (αντιστοιχεί στους στόχους Π9, Π10 και Π12)

Ένας θρύλος αναφέρει ότι ζητήθηκε από τον εφευρέτη του παιχνιδιού που λέγεται σκάκι, να ορίσει ο ίδιος την ανταμοιβή του για την εφεύρεση αυτή. Λέγεται, λοιπόν, ότι η απαίτησή του βρίσκεται στο παρακάτω κείμενο:

«Φανταστείτε μια σκακιέρα. Αυτή έχει 64 τετράγωνα.

Στο πρώτο τετράγωνο τοποθετούμε 1 κόκκο σιτάρι,
στο δεύτερο τετράγωνο 2 κόκκους σιτάρι,
στο τρίτο τετράγωνο 4 κόκκους σιτάρι,
στο πέμπτο τετράγωνο 8 κόκκους σιτάρι, κ.ο.κ.
μέχρι να τοποθετήσουμε και στα 64 τετράγωνα κόκκους σιταριού. Θα ήθελα τόσους κόκκους σιταριού, όσους έχει επάνω η σκακιέρα».

α) Πόσοι κόκκοι σιταριού έχουν τοποθετηθεί στο 64ο τετράγωνο;

β) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, πόσοι κόκκοι σιταριού θα είχαν τοποθετηθεί στο ν-οστό τετράγωνο;

γ) Αποτελεί το πλήθος των κόκκων σε κάθε τετράγωνο διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να υπολογίσετε τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας:
2^0, 2^0+2^1, $2^0+2^1+2^2$, $2^0+2^1+2^2+2^3$ κ.ο.κ. Πόσοι συνολικά κόκκοι σιταριού βρίσκονται στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας;

ε) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, προσπαθήστε να εικάσετε πόσοι θα ήταν στην περίπτωση αυτή συνολικά οι κόκκοι πάνω στη σκακιέρα;

Δ.20 (αντιστοιχεί στους στόχους Π9, Π10 και Π12)

Στην προηγούμενη δραστηριότητα βρήκαμε ότι το άθροισμα των πρώτων ν όρων της γεωμετρικής προόδου με $α_1= 1$ και $λ=2$ είναι: $1+2+2^2+2^3+...+2^{ν-1} = 2^ν-1$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των: 3^0, 3^0+3^1, $3^0+3^1+3^2$, $3^0+3^1+3^2+3^3$

β) Προσπαθήστε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα $3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^{ν-1}$

γ) Στη συνέχεια, προσπαθήστε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα: $4^0+4^1+4^2+...+4^{ν-1}$

δ) Μπορείτε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα: $1+λ^1+λ^2+...+λ^{ν-1}$, για οποιοδήποτε $λ\neq 1$.

ε) Αν ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου δεν είναι ίσος με 1 (δηλ. $α_1\neq 1$), πως μεταβάλλεται η παράσταση του ερωτήματος (δ); Πως μπορούμε να προσαρμόσουμε τον τύπο που βρήκαμε στο (δ) ερώτημα, ώστε να ισχύει γενικά;

Δ.21 (αντιστοιχεί στους στόχους Π9, Π10 και Π12)

Ένα φυτό έχει ύψος 1,67cm στο τέλος της πρώτης εβδομάδας της ζωής του και συνεχίζει να ψηλώνει για 9 εβδομάδες ακόμα. Κάθε εβδομάδα ψηλώνει 4% περισσότερο από την προηγούμενη.

α) Αποτελούν τα ύψη του φυτού στο τέλος κάθε εβδομάδας όρους αριθμητικής ή γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν η απάντηση στο (α) ερώτημα είναι καταφατική, να γράψετε το γενικό όρο της προόδου.

γ) Ποιο είναι το ύψος που πήρε το φυτό την 4η εβδομάδα; (να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης)

δ) Ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το φυτό;

Δ.22 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ2)

Ας υποθέσουμε ότι στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μέγιστη μηνιαία θερμοκρασία για την πόλη της Θεσσαλονίκης το έτος 2003.

ΙΑΝ	ΦΕΒ	ΜΑΡ	ΑΠΡ	ΜΑΙΟΣ	ΙΟΥΝ	ΙΟΥΛ	ΑΥΓ	ΣΕΠΤ	ΟΚΤ	ΝΟΕΜ	ΔΕΚ
-0,3°C	-0,8°C	4°C	11°C	13°C	20°C	20°C	25°C	20°C	15°C	12°C	7°C

Είναι η αντιστοιχία: Μήνας → Θερμοκρασία συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ.23 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ2)

Είναι οι παρακάτω αντιστοιχίες συναρτήσεις; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Ημερομηνία γέννησης → άνθρωποι που έχουν γεννηθεί εκείνη την ημέρα

β) Άτομο → Ημέρα γενεθλίων

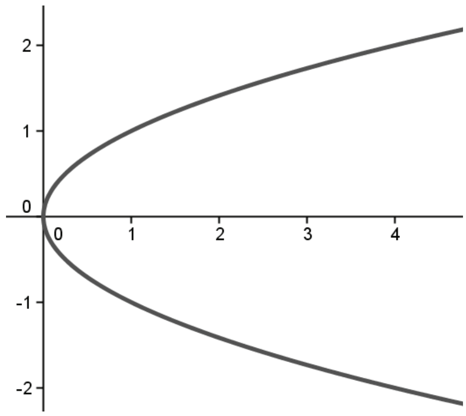
γ) Όνομα → Ταυτότητα

δ) Μαθητής της τάξης → Αριθμός τηλεφώνου.

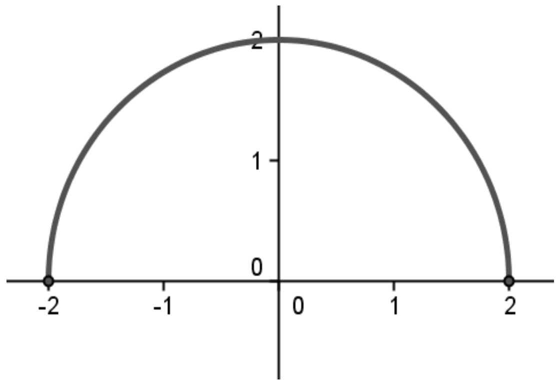
Δ.24 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ4)

Είναι τα παρακάτω διαγράμματα γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

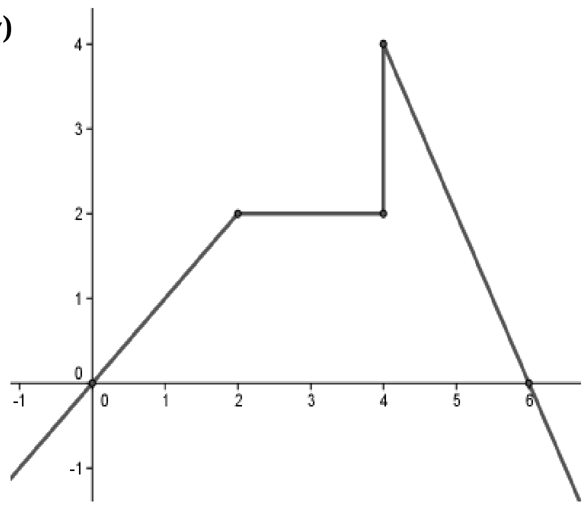
α)



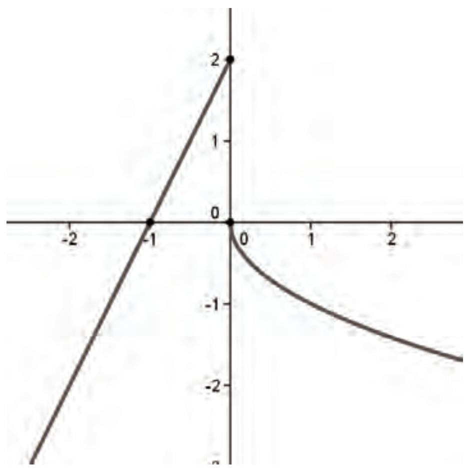
β)



γ)



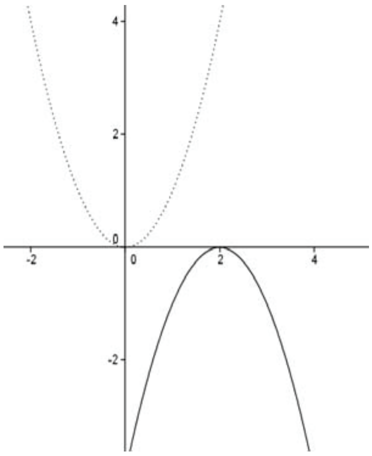
δ)



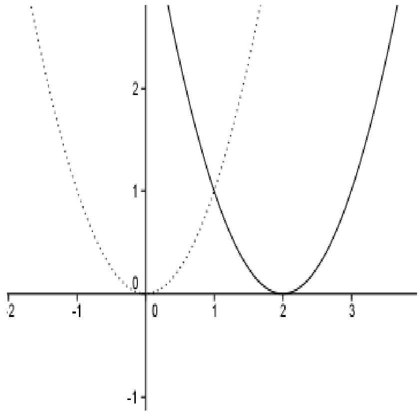
Δ.25 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ5)

Δίνονται οι παρακάτω παραβολές (σε κάθε σχήμα η παραβολή που παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή είναι η $y=x^2$).

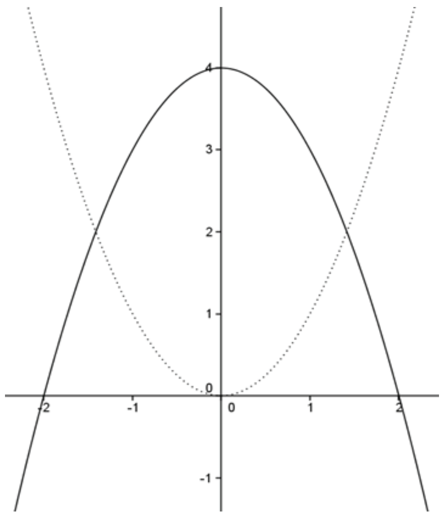
(A)



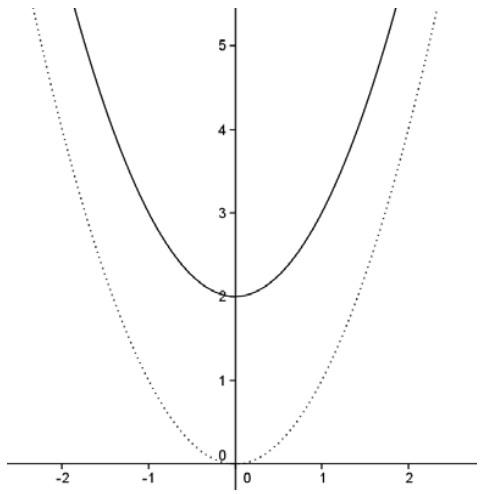
(B)



(Γ)



(Δ)



I) Να βρείτε ποια παραβολή είναι η γραφική παράσταση καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις, αιτιολογώντας την επιλογή σας:

α) $f(x)= (2-x)^2$

β) $g(x)= x^2+2$

γ) $h(x)= (2-x)(x+2)$

II) Να βρείτε τη συνάρτηση στην οποία αντιστοιχεί η παραβολή που δεν είναι γραφική παράσταση μιας από τις συναρτήσεις f, g και h.

Δ.26 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ6)

Ένα κινητό που κινείται έτσι ώστε η απόστασή του (σε km) από ένα σημείο Α (που το θεωρούμε αρχή της μέτρησης) σε σχέση με το χρόνο (σε ώρες) φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στα ερωτήματα:

α) Ποια ήταν η διάρκεια της κίνησης;

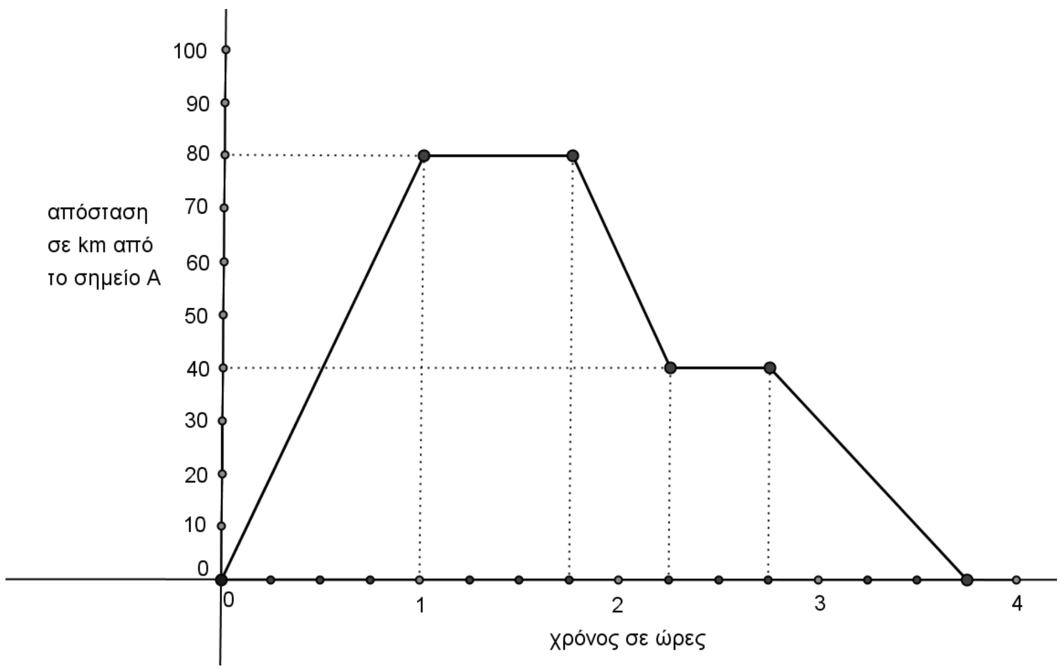
β) Πόσα χιλιόμετρα είναι η συνολική απόσταση;

γ) Πόσες φορές το κινητό έκανε στάση και για πόση ώρα;

δ) Πόσος χρόνος πέρασε μέχρι να κάνει την πρώτη στάση, τι απόσταση διήνυσε και ποιά ήταν η ταχύτητά του σ' αυτό το χρονικό διάστημα;

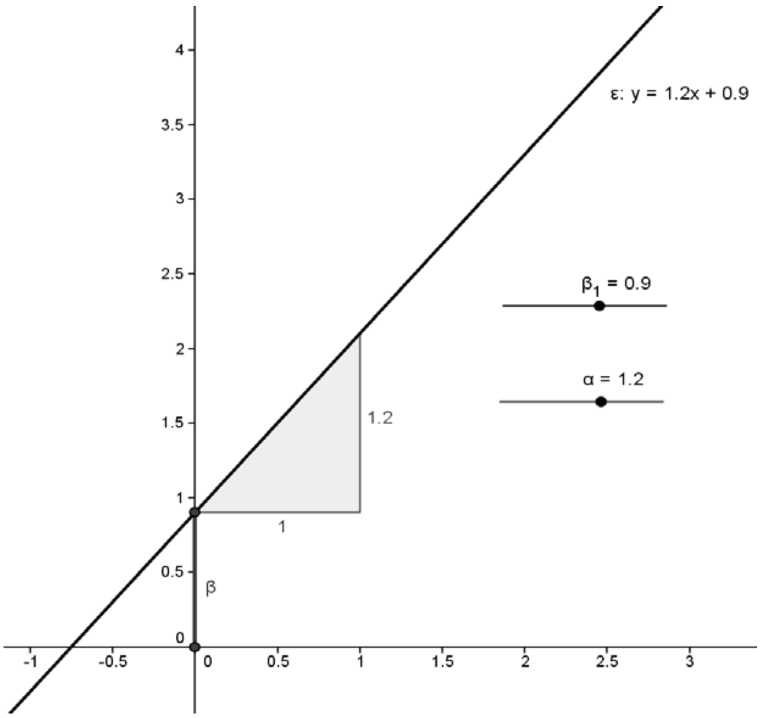
ε) Σε τι απόσταση από το Α θα βρίσκεται: 45 λεπτά, 1 ώρα και 15 λεπτά , 1 ώρα και 33 λεπτά, 3 ώρες και 30 λεπτά και 4 ώρες μετά την αρχή της μέτρησης.

στ) Προσπαθήστε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφεται στο διάγραμμα.



Δ.27 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ1)

Με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να μεταβάλλετε τις τιμές στα α και β και να διερευνήσετε τις μεταβολές της ευθείας y=αx+β. Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε το ρόλο των παραμέτρων α και β.



Δ.28 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ3)

Ο Στέφανος ζεσταίνει νερό με χρήση ενός θερμομέτρου. Η θερμοκρασία του νερού αυξάνεται γραμμικά κατά 15°C κάθε 2 λεπτά. Αν στην αρχή το νερό έχει θερμοκρασία 10°C:

α) Είναι η αντιστοιχία χρόνου – θερμοκρασίας συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

Χρόνος (t) σε min		1	2	3		
Θερμοκρασία (θ) σε °C	10				40	55

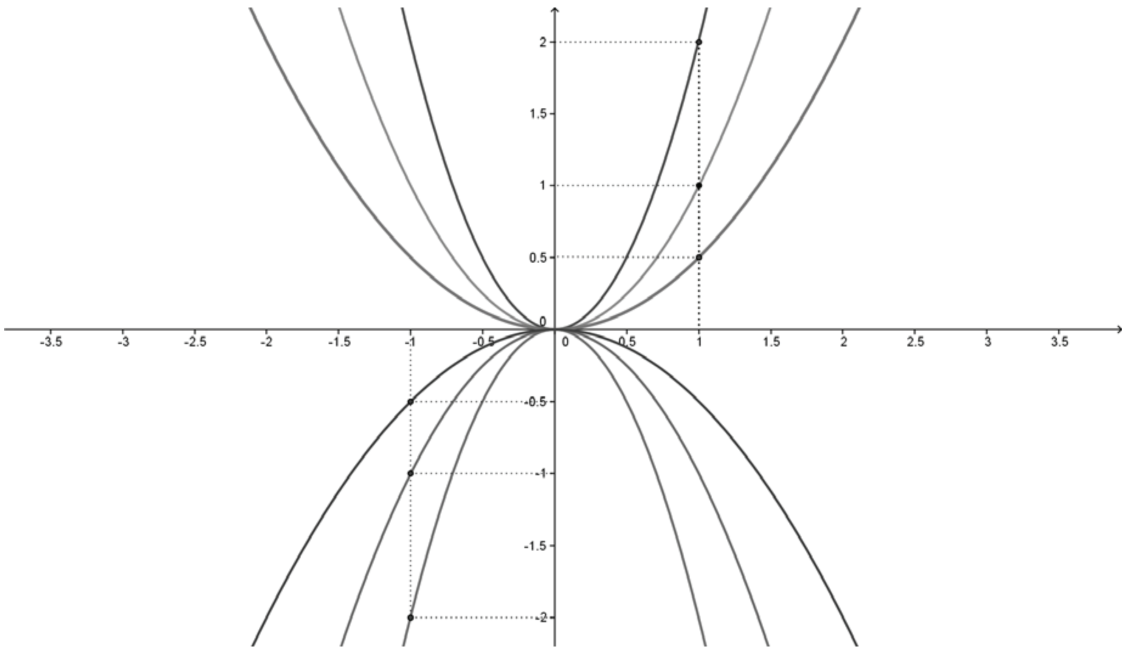
β) Να παραστήσετε γραφικά την αντιστοιχία χρόνου – θερμοκρασίας.

γ) Με χρήση της γραφικής παράστασης, να εκτιμήσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό.

δ) Προσπαθήστε να εκφράσετε αλγεβρικά τη σχέση που περιγράφει την αντιστοιχία χρόνου – θερμοκρασίας και υπολογίστε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό.

Δ.29 (αντιστοιχεί στους στόχους ΜΣ4 και ΜΣ5)

Στο παρακάτω σύστημα αξόνων δίνονται έξι παραβολές.



α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι οι παραπάνω παραβολές.

β) Τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία των συναρτήσεων του ερωτήματος (α);
Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

γ) Για κάθε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις, υπάρχει τιμή της μεταβλητής x για την οποία η συνάρτηση παίρνει τη μεγαλύτερη ή τη μικρότερη τιμή της; Εκφράστε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας. Μπορείτε να γενικεύσετε αυτά τα συμπεράσματα για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

δ) Έχει η καθεμιά από τις παραπάνω παραβολές άξονα ή κέντρο συμμετρίας; Εκφράστε αλγεβρικά τις συμμετρίες αυτές. Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

ε) Από τι εξαρτάται το «άνοιγμα» μιας παραβολής και με ποιόν τρόπο;

στ) Παρατηρήστε τις παραβολές $y = αx^2$ και $y = -αx^2$. Είναι συμμετρικές μεταξύ τους;

Δ.30 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ6)

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $ψ = x^2$ και $ψ = x^2 + κ$ για διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ. Πώς μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $ψ = x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $ψ = x^2$ και $ψ = (x+λ)^2$ για διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ. Πώς μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $ψ = x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Αφού τη γράψετε στη μορφή $f(x) = (x+λ)^2 + κ$ προσπαθήστε να την παραστήσετε γραφικά ξεκινώντας από την $ψ = x^2$ με βάση τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προηγούμενα ερωτήματα.

δ) Σε ποιά διαστήματα η $f(χ) = x^2 - 4x + 5$ είναι αύξουσα και σε ποιά φθίνουσα; Για ποιά τιμή του x παρουσιάζει η f ελάχιστη τιμή και ποιά είναι αυτή; Έχει η γραφική παράσταση της f άξονα συμμετρίας;

(Για την παραπάνω δραστηριότητα ενδείκνυται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας).

Δ.31 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ6)

Ένας μαθητής πειραματίζεται παριστάνοντας γραφικά συναρτήσεις της μορφής $f(x) = αx^2+ 2βx + γ$. Ως τιμές των α, β και γ διαλέγει διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής προόδου: 1, 2, 4, 8, 16, 32,….

α) Με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, να χαράξετε κάποιες γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να γενικεύσετε την παρατήρησή σας και να αποδείξετε την ισχύ της γενίκευσης αυτής;

β) Τι θα συμβεί αν με της ίδιας μορφής συναρτήσεις χρησιμοποιήσουμε άλλες γεωμετρικές προόδους; Μπορείτε να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας;

Δ.32 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ7)

Δίνεται η συνάρτηση $φ(x)= 2x^2-4x-6$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
φ(x)							

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(x).

γ) Με χρήση της παραπάνω γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε τις λύσεις των εξισώσεων $φ(x)=0$, $φ(x)=2$ και της ανίσωσης $φ(x)>0$.

δ) Να επιλύσετε αλγεβρικά τις $φ(x)=0$, $φ(x)=2$ και την $φ(x)>0$ και να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με εκείνες του ερωτήματος (γ).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στόχοι	**Θεματικές ενότητες (Διατιθέμενος χρόνος)**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία (ΕΓ) (2 ώρες)		
ΕΓ1. Διακρίνουν την αναγκαιότητα της μετάβασης από την Πρακτική στη Θεωρητική Γεωμετρία.	Πρακτική και Θεωρητική Γεωμετρία.	Να σχεδιάσετε τρία τρίγωνα και, μετρώντας τις γωνίες τους, να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών τους. Από τις μετρήσεις αυτές μπορείτε να εξάγετε ένα συμπέρασμα για το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου; Μπορείτε να διαπιστώσετε κάποια βασική αδυναμία στη διαδικασία της μέτρησης;
ΕΓ2. Αποκτούν μια πρώτη αίσθηση της ιστορικής εξέλιξης και θεμελίωσης της Θεωρητικής Γεωμετρίας και των βασικών αρχών ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικό σύστημα.	Βασικές αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικό σύστημα.	
Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα (Σχ) (5 ώρες)		
Σχ1. Αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές έννοιες σημείο, ευθεία και επίπεδο ως πρωταρχικές και αναγνωρίζουν τις ιδιότητες και τις παραδοχές που τις διέπουν.	Πρωταρχικές έννοιες και παραδοχές	
Σχ2. Αναγνωρίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά, τις σχέσεις και τις πράξεις ευθύγραμμων τμημάτων, γωνιών και τόξων μέσω των αντίστοιχων ορισμών.	Ευθύγραμμο τμήμα, Γωνία, Κύκλος – Τόξο. (Χαρακτηριστικά, Ορισμοί, Συγκρίσεις, Πράξεις, Βασικά θεωρήματα).	Να σχεδιάσετε δυο γωνίες: α) μόνο με κοινή κορυφή, β) μόνο με κοινή πλευρά γ) με κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και άλλα κοινά σημεία, δ) με κοινή πλευρά, κοινή κορυφή και κανένα άλλο κοινό σημείο.
Σχ3. Διερευνούν και διατυπώνουν βασικές ιδιότητες των ευθυγράμμων τμημάτων, γωνιών και τόξων.		Επιδιώκουμε οι μαθητές να κάνουν εικασίες για ιδιότητες των γωνιών και να τις ελέγξουν αποδεικτικά. Μια δραστηριότητα που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είναι η Δ.1

Σχ4. Αποδεικνύουν βασικές γεωμετρικές προτάσεις χρησιμοποιώντας διάφορες αποδεικτικές μεθόδους. Ελέγχουν την ορθότητα δεδομένων συλλογισμών		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.1 Δ.2 και Δ.3
Σχ5. Διατυπώνουν το αντίστροφο πρότασης και διερευνούν την ισχύ του.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.1 και Δ.2
Σχ6. Συνδέουν χαρακτηριστικά και διαδικασίες στα βασικά γεωμετρικά σχήματα (ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, τόξο) με στόχο να διακρίνουν και να αναπτύσσουν κοινές στρατηγικές απόδειξης σχετικών προτάσεων.		Κοινή διαπραγμάτευση ασκήσεων με μέσο ευθύγραμμου τμήματος, διχοτόμο γωνίας, μέσο τόξου. Μια δραστηριότητα που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είναι η Δ.4
Τρίγωνα (Τ) (19 ώρες)		
Τ1. Ταξινομούν τα τρίγωνα με βάση τις σχέσεις των πλευρών και το είδος των γωνιών του, αναγνωρίζουν τα δευτερεύοντα στοιχεία του τριγώνου (διάμεσος, διχοτόμος ύψος) με βάση τους αντίστοιχους ορισμούς, τα σχεδιάζουν και τα συμβολίζουν.	Είδη και στοιχεία τριγώνου. (1 ώρα)	Να διερευνήσετε τη θέση των υψών σε διάφορα είδη τριγώνου. Να σχεδιάσετε με γνώμονα τα ύψη σε αμβλυγώνιο τρίγωνο. (Η διαπραγμάτευση του πρώτου μέρους της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές.)
Τ2. Διακρίνουν πότε σχέσεις μεταξύ βασικών στοιχείων τριγώνων από-τελούν κριτήριο ισότητας των τριγώνων. Αποδεικνύουν κριτήρια ισότητας τριγώνων καθώς και αυτά που αφορούν στα ορθογώνια τρίγωνα. Χρησιμοποιούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων για να αποδεικνύουν ισότητες	Γενικά κριτήρια ισότητας τριγώνων και κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. (6 ώρες)	Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.5, Δ.6 και Δ.7

τριγώνων, ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών.		
Τ3. Διερευνούν (χρησιμοποιώντας και λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας), προσδιορίζουν και αποδεικνύουν σε ποιες γραμμές ανήκουν σημεία που ικανοποιούν συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες. Αναγνωρίζουν τον κύκλο, τη μεσοκάθετο τμήματος και τη διχοτόμο γωνίας ως γεωμετρικούς τόπους.	Βασικοί γεωμετρικοί τόποι (κύκλος, μεσοκάθετος, διχοτόμος). (2 ώρες)	Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.8, Δ.9 και Δ.10
Τ4. Διερευνούν, προσδιορίζουν και αποδεικνύουν βασικές ανισοτικές σχέσεις στοιχείων του τριγώνου, με ιδιαίτερη έμφαση στην τριγωνική ανισότητα. Εφαρμόζουν τις σχέσεις αυτές στην επίλυση προβλημάτων.	Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο – Κάθετα και πλάγια τμήματα σε ευθεία. (4ώρες)	Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.11, Δ.12 και Δ.13
Τ5. Προσδιορίζουν και αιτιολογούν τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, καθώς και τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων.	Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου – Σχετικές θέσεις κύκλων. (3 ώρες)	Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.14 και Δ.15
Τ6. Πραγματοποιούν απλές γεωμετρικές κατασκευές.	Γεωμετρικές κατασκευές. (3 ώρες)	Δίνονται δυο τεμνόμενες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και ένα σημείο Α της $ε_1$. Να κατασκευάσετε μόνο με κανόνα και διαβήτη κύκλο που εφάπτεται στις δυο ευθείες και έχει με την $ε_1$ σημείο επαφής το Α.
Παράλληλες ευθείες (ΠΕ) (10 ώρες)		
ΠΕ1. Διερευνούν, προσδιορίζουν και αποδεικνύουν κριτήρια παραλληλίας δύο ευθειών μέσω των σχέσεων γωνιών που σχηματίζουν αυτές με μια τέμνουσα. Αποκτούν μια πρώτη	Κριτήριο παραλληλίας ευθειών – αίτημα παραλληλίας και ιδιότητες παραλλήλων. (4 ώρες)	Ο καθηγητής θα μπορούσε να προκαλέσει μια συζήτηση με τους μαθητές σχετικά με τη σημασία του «αιτήματος παραλληλίας». Παράδειγμα μιας τέτοιας προσέγγισης, είναι η Δ.16.

αίσθηση του ρόλου του «αιτήματος παραλληλίας» στην ιστορική εξέλιξη και τη φύση της Γεωμετρίας. Αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν βασικές ιδιότητες των παραλλήλων.		
ΠΕ2. Διερευνούν την ύπαρξη και κατασκευάζουν γεωμετρικά τον περιγεγραμμένο και τον εγγεγραμμένο κύκλο τριγώνου.	Περιγεγραμμένος και εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου. (2 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.17
ΠΕ3. Αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων την πρόταση για το άθροισμα γωνιών τριγώνου.	Άθροισμα γωνιών τριγώνου. (3 ώρες)	Θεωρήστε τρίγωνο ΑΒΓ και μεταφέρετε (με κανόνα και διαβήτη) τις γωνίες Α και Β του τριγώνου ώστε οι γωνίες Α, Β, Γ να γίνουν διαδοχικές. Τι παρατηρείτε για το άθροισμα τους; Μπορείτε να αιτιολογήσετε αποδεικτικά την παρατήρησή σας;
ΠΕ4. Βρίσκουν το άθροισμα των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου, πενταγώνου και γενικεύοντας το συλλογισμό βρίσκουν το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου.	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου. (1 ώρα)	Να σχεδιάσετε ένα κυρτό πολύγωνο, για παράδειγμα, τετράπλευρο, πεντάγωνο ή εξάγωνο και να υπολογίσετε το πλήθος των τριγώνων που σχηματίζονται αν ενώσουμε μια κορυφή του πολυγώνου με κάθε μια από τις μη γειτονικές κορυφές της. Να εξετάσετε τι συμβαίνει στην περίπτωση του ν-γώνου. Πόσα είναι τότε τα αντίστοιχα τρίγωνα; Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου, πενταγώνου, εξαγώνου, ν-γώνου.
Παραλληλόγραμμα –Τραπέζια (ΠΤ) (17 ώρες)		
ΠΤ1. Αναγνωρίζουν παραλληλόγραμμα με βάση τον ορισμό και τα κριτήρια. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου στην επίλυση προβλημάτων.	Παραλληλόγραμμο (3 ώρες)	Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.18 και Δ.19 .

ΠΤ2. Αναγνωρίζουν τα είδη των παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) με βάση τον ορισμό τους και τα αντίστοιχα κριτήρια. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες τους στην επίλυση προβλημάτων.	Είδη παραλληλογράμμων (Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο). (4 ώρες)	Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.20, Δ.21και Δ.22 .
ΠΤ3. Διερευνούν, προσδιορίζουν και αποδεικνύουν ιδιότητες στα τρίγωνα χρησιμοποιώντας ιδιότητες των παραλληλο-γράμμων. Χρησιμοποιούν αυτές τις ιδιότητες στην επίλυση προβλημάτων.	Εφαρμογές των παραλληλογράμμων (7 ώρες)	Δίνονται δυο ευθύγραμμα τμήματα, το ένα διπλάσιο του άλλου. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η μεγαλύτερη πλευρά ΒΓ ισούται με το μεγαλύτερο από τα δοθέντα τμήματα και η διάμεσος ΑΜ ισούται με το μικρότερο από τα δοθέντα τμήματα. Τι τρίγωνο δημιουργήθηκε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές.)
ΠΤ4. Αναγνωρίζουν τραπέζια και ισοσκελή τραπέζια. Διερευνούν και αποδεικνύουν ιδιότητες των τραπεζίων και ισοσκελών τραπεζίων και τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.	Τραπέζια (3 ώρες)	Θεωρήστε τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, α) Να δείξετε ότι αν ΑΒ ≠ ΑΓ και η γωνία Β δεν είναι ορθή τότε το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. β) Να εξετάσετε το είδος του σχήματος με κορυφές ΚΛΜΔ, αν i) ΑΒ=ΑΓ, ii) η γωνία Β είναι ορθή.
Εγγεγραμμένα σχήματα (Εγ) (6 ώρες)		
Εγ1. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις σχέσεις εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας καθώς και τη σχέση τους με τη γωνία χορδής και εφαπτομένης. Χρησιμοποιούν τις παραπάνω σχέσεις στην επίλυση προβλημάτων.	Σχέση εγγεγραμμένης - επίκεντρης και γωνίας χορδής και εφαπτομένης. (3 ώρες)	Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και Μ σημείο του κυρτού τόξου ΒΓ. Να συγκρίνετε το τμήμα ΜΑ με το άθροισμα ΜΒ+ΜΓ, αν: α) το Μ είναι κάποιο από τα άκρα του τόξου ΒΓ β) το Μ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ γ) το Μ είναι τυχαίο σημείο του τόξου ΒΓ (Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές.)

Εγ2. Διερευνούν, προσδιορίζουν και αποδεικνύουν βασικές ιδιότητες των εγγεγραμμένων και τα κριτήρια εγγραψιμότητας τετραπλεύρων. Χρησιμοποιούν τις σχετικές προτάσεις στην επίλυση προβλημάτων.	Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα. (3 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.23

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δ.1 (αντιστοιχεί στους στόχους Σχ3, Σχ4 και Σχ5)

Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους 2 εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών, αν η μια από τις δύο γωνίες είναι: α) 30^0 β) 45^0 γ) 60^0 ή δ) 90^0. Τι παρατηρείτε;

α) Μπορείτε να εικάσετε το μέτρο της γωνίας φ που σχηματίζουν οι διχοτόμοι κάθε παραπάνω ζεύγους εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών; Προσπαθήστε να αποδείξετε την εικασία σας.

β) Μπορείτε να αποδείξετε αν η κάθετη στη διχοτόμο μιας γωνίας είναι διχοτόμος της εφεξής και παραπληρωματικής της;

(Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές. Σε τέτοιο περιβάλλον, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν τις διχοτόμους δυο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών, να μετρήσουν τη μεταξύ τους γωνία φ, όταν η κοινή πλευρά των εφεξής γωνιών στρέφεται γύρω από την αρχή της, και να κάνουν μια εικασία για το μέτρο της γωνίας φ. Στη συνέχεια μπορεί να τους ζητηθεί να αποδείξουν την εικασία.)

Δ.2 (αντιστοιχεί στους στόχους Σχ4 και Σχ5)

Δίνονται δυο προτάσεις Α και Β.

Πρόταση Α: Η ακτίνα που αντιστοιχεί στο μέσο ενός τόξου διχοτομεί την επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο αυτό.

Πρόταση Β: Έστω Α, Β, Γ διαδοχικά σημεία μιας ευθείας και Μ, Ν εσωτερικά σημεία των τμημάτων ΑΒ και ΒΓ. Αν τα Μ, Ν είναι μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, τότε το τμήμα ΜΝ είναι ίσο με το ημιάθροισμα των ΑΒ, ΒΓ.

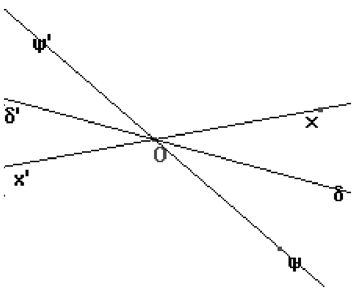
α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Α και Β αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να διατυπώσετε τις αντίστροφες των προτάσεων Α και Β και να εξετάσετε αν ισχύουν.

γ) Αν κάποια από τις προτάσεις Α, Β ισχύει η ίδια και η αντίστροφή της να τη διατυπώσετε σαν ενιαία πρόταση.

Δ.3 (αντιστοιχεί στο στόχο Σχ5)

Ένας μαθητής, στην προσπάθειά του να αποδείξει ότι «οι διχοτόμοι δυο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες», σχεδίασε το παρακάτω σχήμα και έγραψε τα εξής:



$$\delta'\hat{O}\delta = \delta'\hat{O}\psi' + \psi'\hat{O}\delta = \delta\hat{O}\psi + \psi'\hat{O}\delta = \psi'\hat{O}\psi$$

($\delta'\hat{O}\psi' = \delta\hat{O}\psi$, ως κατακορυφήν)

Άρα Οδ΄, Οδ αντικείμενες ημιευθείες.

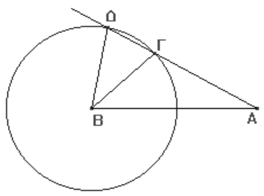
Μπορείτε να σχολιάσετε το συλλογισμό του μαθητή; Θα μπορούσατε να δώσετε μια δική σας απόδειξη για τη συγκεκριμένη πρόταση;

Δ.4 (αντιστοιχεί στο στόχο Σχ5)

Να δείξετε ότι τα μέσα δυο διαδοχικών τμημάτων/τόξων ορίζουν τμήμα/τόξο ίσο με το ημιάθροισμά τους. Μπορείτε να διατυπώσετε και να αποδείξετε μια αντίστοιχη πρόταση για τις γωνίες;

Δ.5 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ2)

Στο παρακάτω σχήμα στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι η ΑΒ κοινή πλευρά, ΒΔ = ΒΓ και η γωνία Α κοινή και προφανώς τα τρίγωνα δεν είναι ίσα. Έτσι παρά το ότι τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και μια γωνία ίση αυτά δεν είναι ίσα. Γιατί συμβαίνει αυτό;



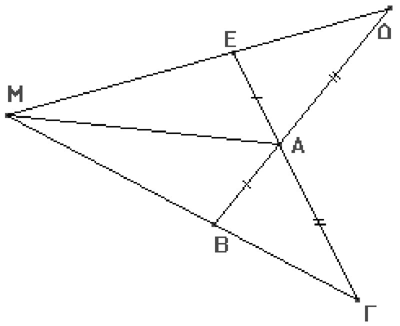
Δ.6 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ2)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ<ΑΓ) και στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Δ, Ε αντίστοιχα ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΒΑ. Αν Μ το κοινό σημείο των ευθειών ΕΔ και ΒΓ:

α) Να βρείτε στο σχήμα αυτό όσα ζεύγη ίσων τριγώνων μπορείτε.

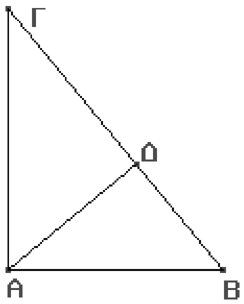
β) Να δείξετε ότι η διαγώνιος του τετραπλεύρου ΑΕΜΒ διχοτομεί δυο γωνίες του.

γ) Να δείξετε ότι μια διαγώνιος του τετραπλεύρου ΑΕΜΒ είναι μεσοκάθετος της άλλης.



Δ.7 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ2)

Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90) το ΑΔ είναι ύψος. Έτσι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ορθογώνια έχουν την ΑΒ κοινή και τη γωνία Β κοινή αλλά προφανώς δεν είναι ίσα. Γιατί συμβαίνει αυτό;



Δ.8 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ3)

Δίνεται τμήμα ΑΒ και σημείο Κ εσωτερικό του ΑΒ, ώστε ρ = ΑΚ>ΑΒ/2. Αν Λ, Μ είναι τα σημεία τομής των κύκλων (Α, ρ), (Β, ρ), να βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκουν τα σημεία Λ, Μ καθώς το Κ μεταβάλλεται; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές.)

Δ.9 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ3)

Να σχεδιάσετε σημεία τα οποία ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας. Να προσδιορίσετε τη γραμμή στη οποία ανήκουν τα σημεία αυτά και αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας.

(Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές.)

Δ.10 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ3)

Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δυο τεμνόμενες ευθείες;

(Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές.)

Δ.11 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ4)

Μπορείτε να κατασκευάσετε τρίγωνα με πλευρές:

i) α = 1, β = 2, γ = 3

ii) α = 2, β = 7, γ = 4

iii) α = 3, β = 4, γ = 6

Μπορείτε να εικάσετε ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα μήκη τριών δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων για να αποτελούν αυτά πλευρές τριγώνου;

Δ.12 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ4)

Ο Ανδρέας ισχυρίζεται ότι:

«Αν θέλουμε να ελέγξουμε την ύπαρξη τριγώνου με πλευρές α = 3,75cm, β = 4,08cm και γ = 7,82cm, θα πρέπει να δούμε αν ικανοποιούνται οι εξής 3 ανισότητες $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$». Η Ειρήνη ρωτά: «Δεν αρκεί ο έλεγχος να γίνει μόνο για μια πλευρά;». Τι θα απαντούσατε στην Ειρήνη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Δ.13 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ4)

Δίνονται μια ευθεία και δύο σημεία εκτός αυτής. Να βρεθεί το σημείο της ευθείας που το άθροισμα των αποστάσεων του από τα δύο σημεία είναι ελάχιστο.

(Η χρήση λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει στη διερεύνηση του θέματος.)

Δ.14 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ5)

Δίνεται κύκλος και σημείο Ρ εκτός αυτού. Να φέρετε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ του κύκλου και μια εφαπτόμενη του κύκλου σε σημείο Ε του κυρτού τόξου ΑΒ, η οποία να τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Μεταβάλλεται η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ όταν μεταβάλλεται η θέση του σημείου Ε; Αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας.

(Η χρήση λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει στη διερεύνηση του θέματος.)

Δ.15 (αντιστοιχεί στο στόχο Τ5)

Δυο σταθεροί κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά ενώ ένας τρίτος κύκλος μεταβάλλεται έτσι ώστε να εφάπτεται στον μεγαλύτερο εσωτερικά και στον μικρότερο εξωτερικά. Να δείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου που έχει κορυφές τα κέντρα των τριών κύκλων είναι σταθερή και ίση με τη διάμετρο του μεγαλύτερου κύκλου.

Δ.16 (αντιστοιχεί στο στόχο ΠΕ1)

Μια από τις βασικές ιδιότητες της ευθείας είναι ότι αποτελεί το συντομότερο δρόμο μεταξύ δυο σημείων του επιπέδου. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δυο σημείων Α, Β της σφαίρας είναι σ' ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας (τον κύκλο με κέντρο το κέντρο της σφαίρας που διέρχεται από τα Α,Β). Θεωρούμε μια νέα Γεωμετρία, που την ονομάζουμε σφαιρική Γεωμετρία, με «επίπεδο» την επιφάνεια της σφαίρας και «ευθείες» τους μέγιστους κύκλους της. Στη σφαιρική Γεωμετρία θεωρήστε μια «ευθεία» (μέγιστο κύκλο) και ένα σημείο Α της σφαίρας εκτός αυτής. Πόσες παράλληλες «ευθείες» διέρχονται από το σημείο Α προς την «ευθεία»;

Δ.17 (αντιστοιχεί στο στόχο ΠΕ2)

Να διερευνήσετε πότε από τρία διαφορετικά σημεία Α, Β και Γ διέρχεται κύκλος.

Μπορούν δυο διαφορετικοί κύκλοι να διέρχονται από τρία διαφορετικά σημεία;

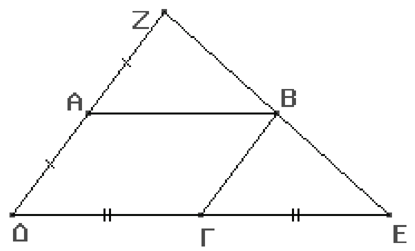
Δ.18 (αντιστοιχεί στο στόχο ΠΤ1)

Ποιες ιδιότητες του παραλληλογράμμου γνωρίζετε; Ποιές είναι οι ελάχιστες δυνατές που εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Δ.19 (αντιστοιχεί στο στόχο ΠΤ1)

Σ' ένα μαθητή δόθηκε η εξής άσκηση: «Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΔΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα ώστε ΑΖ = ΔΑ και ΓΕ = ΔΓ. Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β, Ε είναι συνευθειακά». Ο μαθητής, αφού σχεδίασε το παρακάτω σχήμα, έγραψε: «$\Gamma\hat{E}B + E\hat{\Gamma}B + \Gamma\hat{B}E = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΕΓΒ) και επειδή $A\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από τη ΒΓ) και $\Gamma\hat{E}B = Z\hat{B}A$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ και ΔΕ που τέμνονται από την ΖΕ) έχουμε: $Z\hat{B}A + A\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}E = 180^\circ$. Δηλαδή $Z\hat{B}E = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Ζ, Β, Ε είναι συνευθειακά».

Είναι σωστός ο συλλογισμός του μαθητή; Πως θα λύνατε εσείς την παραπάνω άσκηση;



Δ.20 (αντιστοιχεί στο στόχο ΠΤ2)

Να σχεδιάσετε: α) τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες που δεν είναι ορθογώνιο β) τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες που δεν είναι ρόμβος.

Δ.21 (αντιστοιχεί στο στόχο ΠΤ2)

Με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο με διαγωνίους δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα.

Σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας να κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο με τέτοιο τρόπο, ώστε κατά τη μετακίνηση μιας εκ των κορυφών του να παραμένει παραλληλόγραμμο.

Δ.22 (αντιστοιχεί στο στόχο ΠΤ2)

Να σχεδιάσετε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου με κορυφές τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του ΑΒΓΔ αντίστοιχα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, ρόμβος ή τετράγωνο, ποιό είναι το είδος του τετρπλεύρου ΚΛΜΝ; Να αποδείξτε τους ισχυρισμούς σας.

(Στη διερεύνηση της δραστηριότητας αυτής μπορεί να βοηθήσει η χρήση λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας).

Δ.23 (αντιστοιχεί στο στόχο Εγ2)

Γνωρίζετε ότι κάθε τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

α) Είναι κάθε τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο;

β) Διέρχονται οι μεσοκάθετοι κάθε τετραπλεύρου από το ίδιο σημείο;

Για τη διερεύνηση των παραπάνω ερωτημάτων, να σχεδιάσετε σε περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να ονομάσετε Κ, Λ, Μ, Ν τα σημεία τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του ΑΒΓΔ. Παρατηρήστε ότι αν μεταβάλλεται μια από τις κορυφές του ΑΒΓΔ τότε ένα από τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν παραμένει σταθερό. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

Να γράψετε κύκλο με κέντρο αυτό το σταθερό σημείο και ακτίνα την απόσταση του σημείου αυτού από μια από τις σταθερές κορυφές του ΑΒΓΔ. Αν μετατοπίσουμε το μεταβλητό σημείο του ΑΒΓΔ ώστε να (φαίνεται ότι) διέρχεται από τον κύκλο, τι παρατηρείτε για τις μεσοκάθετες των πλευρών του ΑΒΓΔ;

Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κριτήριο εγγραψιμότητας τετραπλεύρων και να ελέγξετε αποδεικτικά την ισχύ του;

Η ισχύς της παρούσης αρχίζει από το Σχολικό Έτος 2011-2012.

Η απόφαση αυτή να δημοσιευθεί στην Εφημερίδα της Κυβερνήσεως.

Μαρούσι, 25 Μαΐου 2011

Η ΥΦΥΠΟΥΡΓΟΣ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ ΧΡΙΣΤΟΦΙΛΟΠΟΥΛΟΥ