ΑΛΓΕΒΡΑ - ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Στόχοι	**Θεματικές Ενότητες (Διατιθέμενος χρόνος)**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
Σύνολα (Σ) (2 ώρες)		
Σ1. Αποφασίζουν αν ένα στοιχείο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και εκφράζουν αυτή τη σχέση συμβολικά.	Σύνολα.	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.1
Σ2. Αναπαριστούν τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή, περιγραφή στοιχείων, διαγράμματα Venn).		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.2
Σ3. Αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων (και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και»).		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.2 και Δ.3
Πιθανότητες (Πθ) (6 ώρες)		
Πθ1. Αναγνωρίζουν αν ένα πείραμα είναι πείραμα τύχης	Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα.	Οι μαθητές διαχωρίζουν ένα αιτιοκρατικό πείραμα από ένα πείραμα τύχης (παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.4)
Πθ2. Προσδιορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και ενδεχόμενα αυτού με διάφορους τρόπους (π.χ. δενδροδιαγράμματα, διαγράμματα Venn, πίνακες διπλής εισόδου).		Το δενδροδιάγραμμα και ο πίνακας διπλής εισόδου ως τρόπος οργάνωσης ενός πειράματος τύχης (παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.5)
Πθ3. Μεταφράζουν διάφορες σχέσεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.6 και Δ.7
Πθ4. Με τη βοήθεια της σχετικής συχνότητας, συνδέουν ένα ενδεχόμενο με έναν αριθμό που αποτελεί μέτρο της «προσδοκίας» πραγματοποίησής του και καταλήγουν στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τον κλασικό ορισμό.	Η έννοια της πιθανότητας.	Στη διεύθυνση: http://www.shodor.org/interactivate/activities/Coin/ μπορεί ο μαθητής να εμπλακεί διαδραστικά με την έννοια της σχετικής συχνότητας

Πθ5. Αναπαριστούν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων με διαγράμματα Venn, τους αιτιολογούν και τους χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.8
Πραγματικοί αριθμοί (Πρ) (14 ώρες)		
Πρ1. Διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και ταξινομούν με ευχέρεια συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (N, Z,Q, R-Q) που ανήκουν. **Πρ2**. Διερευνούν τις ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών. Αναγνωρίζουν τη σημασία της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» , «και» στις ιδιότητες. Αιτιολογούν με αντιπαραδείγματα γιατί δεν ισχύει η ισοδυναμία σε ορισμένες ιδιότητες. **Πρ3**. Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες αναλογιών στην επίλυση προβλημάτων. **Πρ4.** Εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα κ.λ.π.) για να δείξουν την ισχύ απλών αλγεβρικών προτάσεων.	Οι πράξεις και οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. (5 ώρες)	Γιατί ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος; Συζητούν το νόημα της συνεπαγωγής ($\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^2=\beta^2$)και διερευνούν την ισχύ του αντιστρόφου. [π.χ. $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow (\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta)$, ή αντιπαράδειγμα για α=2, β=-2] Προβληματίζονται σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους αποδεικνύεται ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει.
Πρ5. Διερευνούν την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών σύνολα που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις και τα συμβολίζουν χρησιμοποιώντας διαστήματα.	Διάταξη των πραγματικών αριθμών. (4 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.9

Πρ6. Διερευνούν και προσδιορίζουν ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας.		Αποδεικνύουν με κατάλληλο αντιπαράδειγμα. ότι η διαίρεση κατά μέλη ανισοτήτων (με θετικούς όρους) δεν ισχύει. Διαπιστώνουν τη σημασία του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη μαθηματικών ισχυρισμών.
Πρ7. Χρησιμοποιούν την έννοια της διάταξης των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων της για να επιλύσουν προβλήματα αναπτύσσοντας κατάλληλες στρατηγικές.		
Πρ8. Ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή συνδέοντας τη με τη γεωμετρική της ερμηνεία.	Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. (3 ώρες)	
Πρ9. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής, τις ερμηνεύουν γεωμετρικά και τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.10
Πρ10. Ορίζουν τη ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού και μέσω αυτής τη δύναμη θετικού αριθμού με ρητό εκθέτη.	Ρίζες πραγματικών αριθμών. (2ώρες)	
Πρ11. Αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν τις βασικές ιδιότητες των ριζών και δυνάμεων.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.11
Εξισώσεις (Ε) (9 ώρες)		
Ε1. Διερευνούν τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης αχ+β=0.	Εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού. Η εξίσωση $χ^{ν}$=α. (4ώρες)	
Ε2. Αναγνωρίζουν το ρόλο της παραμέτρου σε μία παραμετρική εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.12
Ε3. Επιλύουν απλές παραμετρικές εξισώσεις (με μία παράμετρο) $1^{ου}$ βαθμού.		

Ε4. Επιλύουν εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού (π.χ. ρητές, με απόλυτες τιμές) εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων και της ισότητας των πραγματικών αριθμών. Διερευνούν και επιλύουν εξισώσεις της μορφής $χ^ν$=α. **Ε5.** Διερευνούν τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης αχ²+βχ+γ=0 και καταλήγουν σε συμπεράσματα τα οποία χρησιμοποιούν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. **Ε6.** Προσδιορίζουν τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και τους χρησιμοποιούν για να κατασκευάσουν εξισώσεις των οποίων οι ρίζες ικανοποιούν δεδομένες σχέσεις. **Ε7.** Επιλύουν εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού.	Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού. (5 ώρες)	Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{\omega+5}{\omega^2-\omega}-\frac{\omega+5}{\omega-1}=\frac{1}{\omega}$ Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.13 και Δ.14
Ανισώσεις (Α) (6 ώρες)		
Α1. Επιλύουν ανισώσεις 1^{ου} βαθμού και προβλήματα που ανάγονται σε ανισώσεις 1^{ου} βαθμού. **Α2.** Διερευνούν την παραγοντοποίηση τριωνύμου και καταλήγουν σε συμπεράσματα τα οποία χρησιμοποιούν για να προσδιορίσουν το πρόσημο των τιμών του. **Α3.** Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση ανισώσεων 2^{ου} βαθμού.	Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού. (2 ώρες) Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού. (4 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.15
Πρόοδοι (Π) (7 ώρες)		
Π1. Αναγνωρίζουν την ακολουθία ως αντιστοιχία των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και χρησιμοποιούν τον κατάλληλο συμβολισμό.	Ακολουθίες. (1 ώρα)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.16

Π2. Υπολογίζουν όρους ακολουθίας που εκφράζεται με γενικό ή αναδρομικό τύπο.	Αριθμητική πρόοδος. (4 ώρες)	
Π3. Διερευνούν ακολουθίες με σταθερή διαφορά διαδοχικών όρων και ορίζουν την αριθμητική πρόοδο.		
Π4. Εξετάζουν αν μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος τεκμηριώνοντας το συλλογισμό τους.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.17 και Δ.18
Π5. Υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας αριθμητικής προόδου.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.17 και Δ.18
Π6. Διερευνούν, προσδιορίζουν και εφαρμόζουν τη σχέση τριών διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου .		
Π7. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση του ν-οστού όρου και του αθροίσματος ν-πρώτων όρων αριθμητικής προόδου.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.17 και Δ.18
Π8. Διερευνούν ακολουθίες με σταθερό λόγο διαδοχικών όρων και ορίζουν τη γεωμετρική πρόοδο.	Γεωμετρική πρόοδος. (4 ώρες)	
Π9. Εξετάζουν αν μια ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος τεκμηριώνοντας το συλλογισμό τους.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.19, Δ.20 και Δ.21
Π10. Υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.19, Δ.20 και Δ.21
Π11. Διερευνούν, προσδιορίζουν και εφαρμόζουν τη σχέση τριών διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου .		
Π12. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση του ν-οστού όρου και του αθροίσματος ν-πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.19, Δ.20 και Δ.21

Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων (ΒΣ) (6 ώρες)		
ΒΣ1. Εισάγονται στην έννοια της συνάρτησης μέσα από πραγματικές καταστάσεις αντιστοίχησης διαφόρων ειδών ώστε να αποκτήσει νόημα ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης.	Η έννοια της συνάρτησης. (3 ώρες)	
ΒΣ2. Επιχειρηματολογούν αν μία αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι και εξοικειώνονται με το συμβολισμό και την ορολογία.		Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.22 και Δ.23
ΒΣ3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια συναρτήσεων (και δίκλαδων).		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.15
ΒΣ4. Διερευνούν αν μια γραμμή σε σύστημα συντεταγμένων είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.	Γραφική παράσταση συνάρτησης. (3 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.24
ΒΣ5. Συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση).		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.25
ΒΣ6. Ερμηνεύουν μία δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.26
ΒΣ7. Προσδιορίζουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τους άξονες και τη σχετική της θέση με το χ΄χ, επιλύοντας εξισώσεις και ανισώσεις.		
Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων (ΜΣ) (8 ώρες)		
ΜΣ1. Διερευνούν τη γραφική παράσταση της $f(χ)=αχ+β$ για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων α και β.	Η συνάρτηση $f(χ)=αχ+β$. (2 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.27
ΜΣ2. Καταλήγουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία και τα εκφράζουν συμβολικά.		
ΜΣ3. Χρησιμοποιούν την $f(χ)=αχ+β$ στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.	Μελέτη της συνάρτησης $f(χ)=αχ^2$. (2ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.28

ΜΣ4. Αναπαριστούν γραφικά και διερευνούν τις συναρτήσεις $g(\chi)=\chi^2$ και $h(\chi)=-\chi^2$ ως προς τη μονοτονία. Καταλήγουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στα ακρότατα και στις συμμετρίες και τα εκφράζουν συμβολικά. **ΜΣ5.** Γενικεύουν τα συμπεράσματά τους για τη συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^2$. **ΜΣ6**. Αναπαριστούν και διερευνούν τη γραφική παράσταση συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$. **ΜΣ7.** Χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ στη διερεύνηση των ριζών και του προσήμου του τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, $\alpha\neq0$.	Μελέτη της συνάρτησης $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$. (4 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.29 Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.29 Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.30 και Δ.31 Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.32

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δ.1 (αντιστοιχεί στο στόχο Σ1)

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα σύμβολα $\in$ και $\notin$, αν ο κάθε αριθμός ανήκει ή δεν ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-5,5				
π				
$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$\sqrt{144}$				
$-\frac{13}{3}$				
$\frac{40}{5}$				
$\sqrt{2}$				
$0,\overline{3}$				
-4				

Δ.2 (αντιστοιχεί στους στόχους Σ2 και Σ3)

Έστω Ω={1,2,3,...,10} ένα βασικό σύνολο και τρία υποσύνολα αυτού Α={1,2,4,7,8}, Β={3,4,8,10} και Γ={2,4,5,10}

α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β και Γ με διάγραμμα Venn.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους καθώς και με διαγράμματα Venn τα σύνολα:

i) Α∪Β ii) Β∩Γ iii) Α∪(Β∩Γ) iv) (Α∩Β)∪Γ v) Α∩Β∩Γ

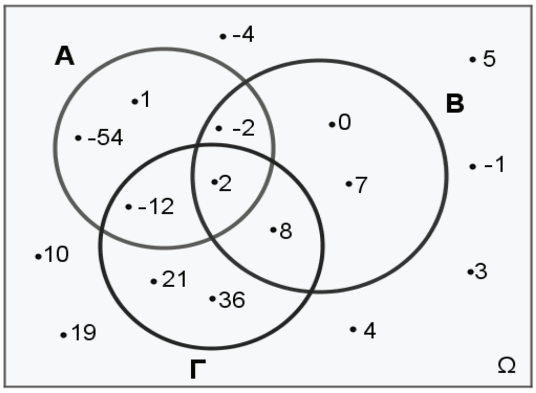
Δ.3 (αντιστοιχεί στους στόχους Σ2 και Σ3)

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ένα βασικό σύνολο Ω και τρία υποσύνολά του Α, Β και Γ.

α) Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων των συνόλων Α, Β και Γ;

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

i) Α∪Β ii) Β∩Γ iii) Α∪(Β∩Γ) iv) Α∩Β∩Γ v) Α΄



Δ.4 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ1)

Ποια από τα παρακάτω πειράματα είναι πειράματα τύχης; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών εκλείψεων του ήλιου.

β) το πλήθος των παιδιών που έχει μία οικογένεια.

γ) το πλήθος των πελατών ενός εμπορικού καταστήματος μια συγκεκριμένη ημέρα.

δ) ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σε ένα αεροδρόμιο εντός καθορισμένου χρονικού διαστήματος.

ε) ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει ένα κινητό γνωστή απόσταση s με σταθερή ταχύτητα v.

ζ) ο τόκος που θα λάβουμε για καταθέσεις ύψους α με προκαθορισμένο επιτόκιο β.

Δ.5 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ2)

Δύο φίλοι παίζουν το γνωστό παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί». Με χρήση δενδροδιαγράμματος ή πίνακα διπλής εισόδου να προσδιορίσετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος και να δημιουργήσετε έτσι το δειγματικό χώρο του πειράματος αυτού. Να προσδιορίσετε το ενδεχόμενο «ισοπαλία».

Δ.6 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ3)

Σε μια ομάδα 20 ατόμων, 4 από τις 7 γυναίκες και 2 από τους 13 άνδρες φορούν γυαλιά. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

Α. να είναι γυναίκα ή να φοράει γυαλιά.

Β. να μην είναι γυναίκα και να φοράει γυαλιά.

Δ.7 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ3)

Από τους μαθητές ενός λυκείου κάποιοι μιλούν πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια εκδήλωση του τμήματος Γαλλικής Φιλολογίας. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα Α: «ο μαθητής να είναι κορίτσι» και Β: «ο μαθητής μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα», να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) Α∪Β ii) Α∩Β iii) Β-Α iv) Α-Β v) Α΄ vi) Α΄∪Β

Δ.8 (αντιστοιχεί στο στόχο Πθ5)

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 32 μαθητές συμμετέχουν σε μια θεατρική ομάδα, 28 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει σε μια τουλάχιστον από τις δυο ομάδες;

β) να συμμετέχει μόνο σε μία από τις δυο ομάδες;

γ) να μη συμμετέχει σε καμία από τις δυο ομάδες;

Δ.9 (αντιστοιχεί στο στόχο Πρ5)

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

α) Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{3}{8}$ και το $\frac{5}{8}$;

β) Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στον 1,2 και στον 1,3; Αν ναι, γράψτε έναν.

γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός α μεγαλύτερος του $\frac{5}{8}$ με την ιδιότητα: «ανάμεσα στον $\frac{5}{8}$ και τον α να μην υπάρχει άλλος αριθμός»;

δ) Υπάρχει ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

ε) Υπάρχει ο επόμενος πραγματικός αριθμός του 24,1; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

στ) Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στον 0,99... και στον 1;. Ανάμεσα στον 0,899... και στον 0,9; Τι παρατηρείτε;

Δ.10 (αντιστοιχεί στο στόχο Πρ9)

Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το σφάλμα της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του δίσκου, τότε:

α) Να παραστήσετε την παραπάνω παραδοχή στην αριθμογραμμή.

β) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόλυτης τιμής.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της D.

Δ.11 (αντιστοιχεί στο στόχο Πρ11)

Δίνεται η παράσταση:

$$\left(\sqrt[6]{2^3}+4\right)\cdot\left(\sqrt[6]{2^3}-4\right)$$

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση υπολογιστή τσέπης.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ) Να συγκρίνετε τις δυο μεθόδους ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος.

Δ.12 (αντιστοιχεί στο στόχο Ε2)

Ο τιμοκατάλογος των TAXI στην Αθήνα περιλαμβάνει 1,19€ για την εκκίνηση και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, ενώ στα νησιά του Αιγαίου περιλαμβάνει 1,14€ για την εκκίνηση και 0,65€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.

α) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με ΤΑΧΙ ένας επιβάτης στην Αθήνα, αν διαθέτει 10€.

β) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με ΤΑΧΙ ένας επιβάτης σε νησί του Αιγαίου, αν διαθέτει 10€.

γ) Αν στους νομούς της Θεσσαλίας η χρέωση για το ΤΑΧΙ περιλαμβάνει 2λ€ για την εκκίνηση και λ€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, να βρείτε σε σχέση με το λ την απόσταση που μπορεί να διανύσει ένας επιβάτης αν διαθέτει 10 €. Αν στο νομό Λαρίσης η χρέωση ανά χιλιόμετρο διαδρομής είναι 0,60€ και στο νομό Μαγνησίας 0,62€, να υπολογίσετε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με ΤΑΧΙ ένας επιβάτης που διαθέτει 10€.

Δ.13 (αντιστοιχεί στο στόχο Ε7)

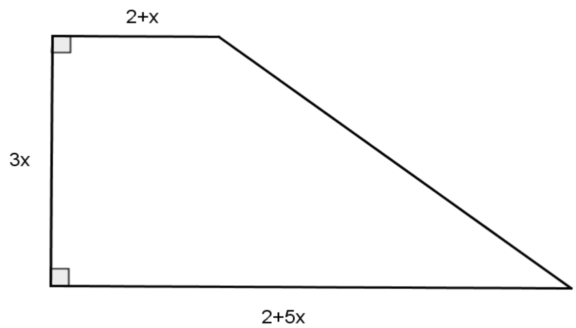
Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δυο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

Δ.14 (αντιστοιχεί στο στόχο Ε7)

Ένας μαραθωνοδρόμος διάνυσε απόσταση 42km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν $1\frac{km}{h}$ μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε $\frac{1}{10}$ της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;

Δ.15 (αντιστοιχεί στους στόχους Α3 και ΒΣ3)

Στο παρακάτω τραπέζιο (οι πλευρές του είναι σε m):



α) Να εκφράσετε την περίμετρό του Π ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Π(x);

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του Ε ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x);

γ) Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του x, αν η περίμετρος του τραπεζίου είναι τουλάχιστον 39m και το εμβαδόν του το πολύ $99m^2$.

Δ.16 (αντιστοιχεί στο στόχο Π1)

Η ακολουθία 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,... ονομάζεται ακολουθία Fibonacci (Leonardo di Pisa (Fibonacci), 1175-1250).

α) Ας αντιστοιχίσουμε, λοιπόν, τους φυσικούς αριθμούς ν με τους όρους της παραπάνω ακολουθίας $x_ν$, συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_ν$	0	1									

β) Παρατηρήστε πως προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας από τον x3 και μετά.

Μπορείτε να υπολογίσετε το $12^ο$ όρο της ακολουθίας; Ποιες πληροφορίες χρειάζονται για τον υπολογισμό του $12^{ου}$ όρου;

γ) Ας προσπαθήσουμε να σκεφτούμε έναν κανόνα που θα μας βοηθά να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο της παραπάνω ακολουθίας.

Δ.17 (αντιστοιχεί στους στόχους Π4, Π5 και Π7)

Δέκα αδέλφια μοιράζονται 100 ευρώ. Κάθε αδελφός παίρνει α ευρώ περισσότερα από τον αμέσως μικρότερό του. Ο $7^{ος}$ στη σειρά αδελφός παίρνει 7 ευρώ.

α) Αποτελούν τα χρήματα που θα πάρουν τα αδέλφια όρους αριθμητικής προόδου;

Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Πόσα χρήματα παίρνει ο κάθε αδελφός;

Δ.18 (αντιστοιχεί στους στόχους Π4, Π5 και Π7)

Ένα έλκηθρο αφήνεται ελεύθερο να κυλίσει σε μια χιονισμένη πλαγιά. Το πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησής του διανύει απόσταση 3cm, το δεύτερο δευτερόλεπτο διανύει απόσταση 5cm, το τρίτο δευτερόλεπτο 7cm, το τέταρτο δευτερόλεπτο 9cm κ.ο.κ. Η κίνηση θα διαρκέσει 60 δευτερόλεπτα.

α) Πόσο διάστημα θα διανύσει στο 20-στό δευτερόλεπτο της κίνησής του;

β) Αν τοποθετήσουμε τα διαστήματα που έχει διανύσει το έλκηθρο στα πρώτα 20 δευτερόλεπτα της κίνησής του με τον παρακάτω τρόπο:

3 5 7 9 11 13 ....31 33 35 37 39 41
41 39 37 35 33 31..................................... 13 11 9 7 5 3

Ποιο είναι το άθροισμα της κάθε στήλης; Μπορείτε να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που θα έχει διανύσει το έλκηθρο στο διάστημα των πρώτων 20 δευτερολέπτων με ένα γρήγορο τρόπο;

γ) Ποιο είναι το διάστημα που θα διανύσει στο ν-οστό δευτερόλεπτο της κίνησής του, με ν≤60 ;

δ) Να αποδείξετε ότι η συνολική απόσταση που θα διανύσει το έλκηθρο στο διάστημα των ν πρώτων δευτερολέπτων, με ν≤60, είναι: ν·(ν+2) cm.

Δ.19 (αντιστοιχεί στους στόχους Π9, Π10 και Π12)

Ένας θρύλος αναφέρει ότι ζητήθηκε από τον εφευρέτη του παιχνιδιού που λέγεται σκάκι, να ορίσει ο ίδιος την ανταμοιβή του για την εφεύρεση αυτή. Λέγεται, λοιπόν, ότι η απαίτησή του βρίσκεται στο παρακάτω κείμενο:

«Φανταστείτε μια σκακιέρα. Αυτή έχει 64 τετράγωνα.

Στο πρώτο τετράγωνο τοποθετούμε 1 κόκκο σιτάρι,
στο δεύτερο τετράγωνο 2 κόκκους σιτάρι,
στο τρίτο τετράγωνο 4 κόκκους σιτάρι,
στο πέμπτο τετράγωνο 8 κόκκους σιτάρι, κ.ο.κ.
μέχρι να τοποθετήσουμε και στα 64 τετράγωνα κόκκους σιταριού. Θα ήθελα τόσους κόκκους σιταριού, όσους έχει επάνω η σκακιέρα».

α) Πόσοι κόκκοι σιταριού έχουν τοποθετηθεί στο 64ο τετράγωνο;

β) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, πόσοι κόκκοι σιταριού θα είχαν τοποθετηθεί στο ν-οστό τετράγωνο;

γ) Αποτελεί το πλήθος των κόκκων σε κάθε τετράγωνο διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να υπολογίσετε τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας:

2^0, 2^0+2^1, $2^0+2^1+2^2$, $2^0+2^1+2^2+2^3$ κ.ο.κ. Πόσοι συνολικά κόκκοι σιταριού βρίσκονται στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας;

ε) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, προσπαθήστε να εικάσετε πόσοι θα ήταν στην περίπτωση αυτή συνολικά οι κόκκοι πάνω στη σκακιέρα;

Δ.20 (αντιστοιχεί στους στόχους Π9, Π10 και Π12)

Στην προηγούμενη δραστηριότητα βρήκαμε ότι το άθροισμα των πρώτων ν όρων της γεωμετρικής προόδου με $α_1= 1$ και $λ=2$ είναι: $1+2+2^2+2^3+...+2^{ν-1} = 2^ν-1$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των: 3^0, 3^0+3^1, $3^0+3^1+3^2$, $3^0+3^1+3^2+3^3$

β) Προσπαθήστε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα $3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^{ν-1}$

γ) Στη συνέχεια, προσπαθήστε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα: $4^0+4^1+4^2+...+4^{ν-1}$

δ) Μπορείτε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα: $1+λ^1+λ^2+...+λ^{ν-1}$, για οποιοδήποτε $λ\neq1$.

ε) Αν ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου δεν είναι ίσος με 1 (δηλ. $α_1\neq1$), πως μεταβάλλεται η παράσταση του ερωτήματος (δ); Πως μπορούμε να προσαρμόσουμε τον τύπο που βρήκαμε στο (δ) ερώτημα, ώστε να ισχύει γενικά;

Δ.21 (αντιστοιχεί στους στόχους Π9, Π10 και Π12)

Ένα φυτό έχει ύψος 1,67cm στο τέλος της πρώτης εβδομάδας της ζωής του και συνεχίζει να ψηλώνει για 9 εβδομάδες ακόμα. Κάθε εβδομάδα ψηλώνει 4% περισσότερο από την προηγούμενη.

α) Αποτελούν τα ύψη του φυτού στο τέλος κάθε εβδομάδας όρους αριθμητικής ή γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν η απάντηση στο (α) ερώτημα είναι καταφατική, να γράψετε το γενικό όρο της προόδου.

γ) Ποιο είναι το ύψος που πήρε το φυτό την $4^η$ εβδομάδα; (να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης)

δ) Ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το φυτό;

Δ.22 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ2)

Ας υποθέσουμε ότι στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μέγιστη μηνιαία θερμοκρασία για την πόλη της Θεσσαλονίκης το έτος 2003.

ΙΑΝ	ΦΕΒ	ΜΑΡ	ΑΠΡ	ΜΑΙΟΣ	ΙΟΥΝ	ΙΟΥΛ	ΑΥΓ	ΣΕΠΤ	ΟΚΤ	ΝΟΕΜ	ΔΕΚ
-0,3°C	-0,8°C	4°C	11°C	13°C	20°C	20°C	25°C	20°C	15°C	12°C	7°C

Είναι η αντιστοιχία: Μήνας → Θερμοκρασία συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ.23 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ2)

Είναι οι παρακάτω αντιστοιχίες συναρτήσεις; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Ημερομηνία γέννησης → άνθρωποι που έχουν γεννηθεί εκείνη την ημέρα

β) Άτομο → Ημέρα γενεθλίων

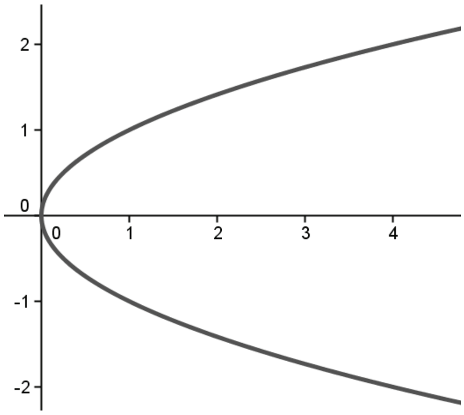
γ) Όνομα → Ταυτότητα

δ) Μαθητής της τάξης → Αριθμός τηλεφώνου.

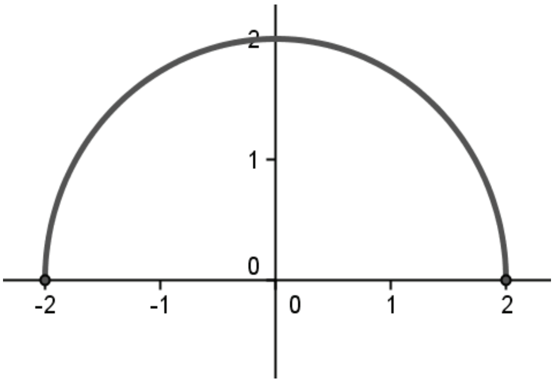
Δ.24 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ4)

Είναι τα παρακάτω διαγράμματα γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

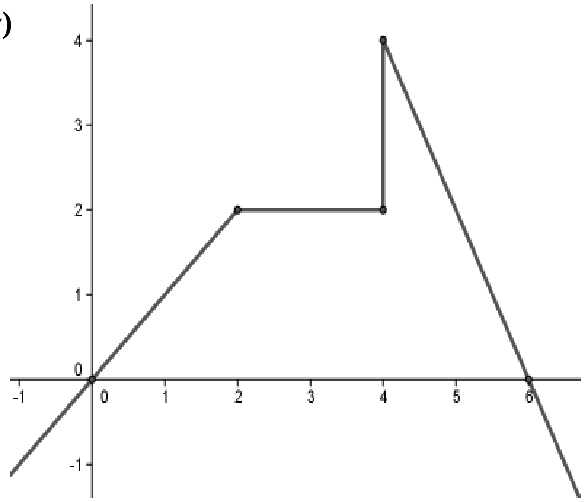
α)



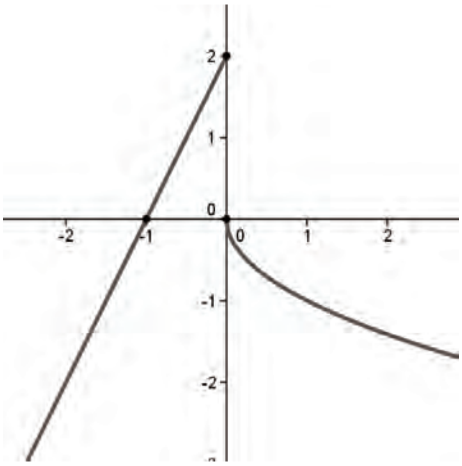
β)



γ)



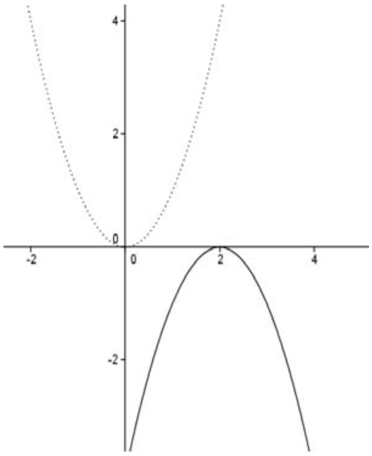
δ)



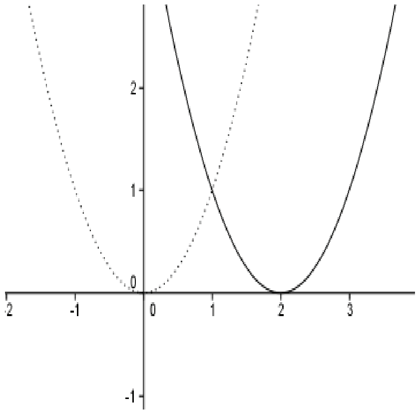
Δ.25 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ5)

Δίνονται οι παρακάτω παραβολές (σε κάθε σχήμα η παραβολή που παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή είναι η $y=x^2$).

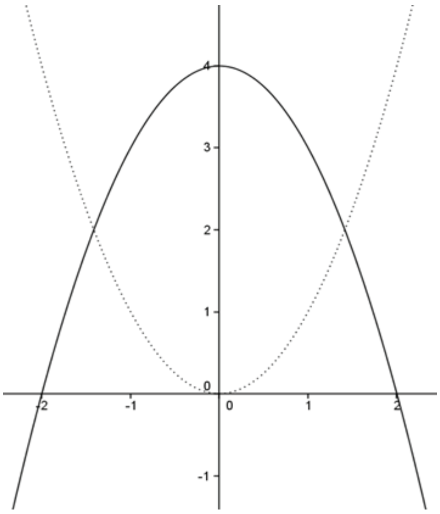
(Α)



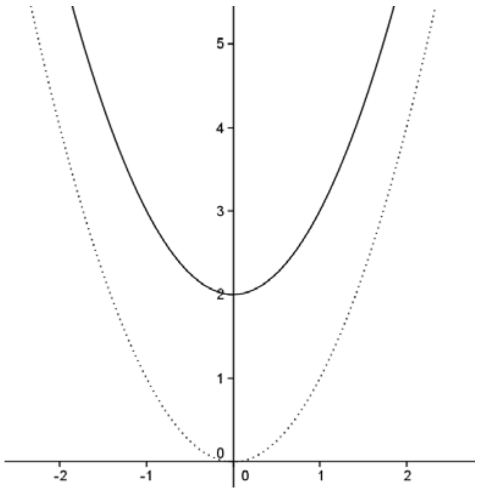
(Β)



(Γ)



(Δ)



Ι) Να βρείτε ποια παραβολή είναι η γραφική παράσταση καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις, αιτιολογώντας την επιλογή σας:

α) $f(x)= (2-x)^2$

β) $g(x)= x^2+2$

γ) $h(x)= (2-x)(x+2)$

ΙΙ) Να βρείτε τη συνάρτηση στην οποία αντιστοιχεί η παραβολή που δεν είναι γραφική παράσταση μιας από τις συναρτήσεις f, g και h.

Δ.26 (αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ6)

Ένα κινητό που κινείται έτσι ώστε η απόστασή του (σε km) από ένα σημείο Α (που το θεωρούμε αρχή της μέτρησης) σε σχέση με το χρόνο (σε ώρες) φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στα ερωτήματα:

α) Ποια ήταν η διάρκεια της κίνησης;

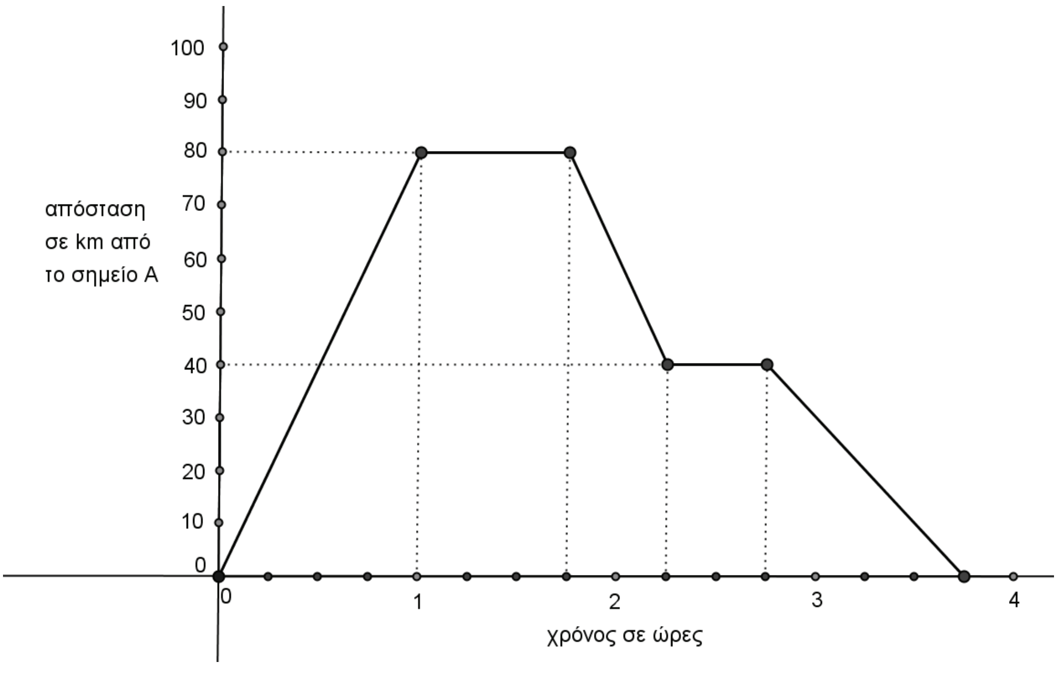
β) Πόσα χιλιόμετρα είναι η συνολική απόσταση;

γ) Πόσες φορές το κινητό έκανε στάση και για πόση ώρα;

δ) Πόσος χρόνος πέρασε μέχρι να κάνει την πρώτη στάση, τι απόσταση διήνυσε και ποιά ήταν η ταχύτητά του σ’ αυτό το χρονικό διάστημα;

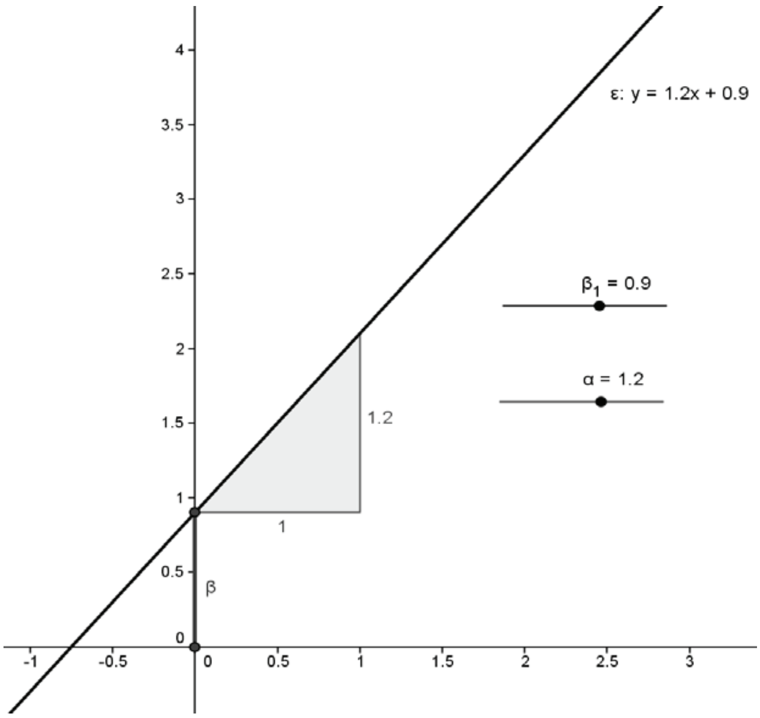
ε) Σε τι απόσταση από το Α θα βρίσκεται: 45 λεπτά, 1 ώρα και 15 λεπτά , 1 ώρα και 33 λεπτά, 3 ώρες και 30 λεπτά και 4 ώρες μετά την αρχή της μέτρησης.

στ) Προσπαθήστε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφεται στο διάγραμμα.



Δ.27 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ1)

Με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να μεταβάλλετε τις τιμές στα α και β και να διερευνήσετε τις μεταβολές της ευθείας y=αx+β. Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε το ρόλο των παραμέτρων α και β.



Δ.28 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ3)

Ο Στέφανος ζεσταίνει νερό με χρήση ενός θερμομέτρου. Η θερμοκρασία του νερού αυξάνεται γραμμικά κατά 15°C κάθε 2 λεπτά. Αν στην αρχή το νερό έχει θερμοκρασία 10°C:

α) Είναι η αντιστοιχία χρόνου – θερμοκρασίας συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

Χρόνος (t) σε min		1	2	3		
Θερμοκρασία (θ) σε °C	10				40	55

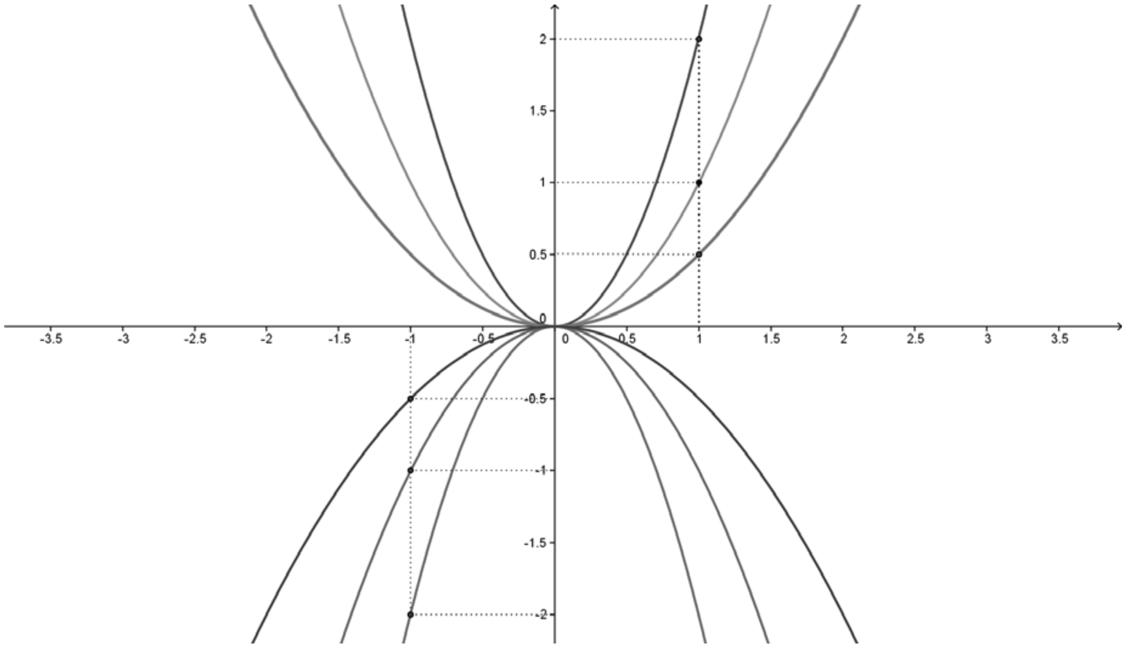
β) Να παραστήσετε γραφικά την αντιστοιχία χρόνου – θερμοκρασίας.

γ) Με χρήση της γραφικής παράστασης, να εκτιμήσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό.

δ) Προσπαθήστε να εκφράσετε αλγεβρικά τη σχέση που περιγράφει την αντιστοιχία χρόνου – θερμοκρασίας και υπολογίστε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό.

Δ.29 (αντιστοιχεί στους στόχους ΜΣ4 και ΜΣ5)

Στο παρακάτω σύστημα αξόνων δίνονται έξι παραβολές.



α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι οι παραπάνω παραβολές.

β) Τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία των συναρτήσεων του ερωτήματος (α);
Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

γ) Για κάθε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις, υπάρχει τιμή της μεταβλητής x για την οποία η συνάρτηση παίρνει τη μεγαλύτερη ή τη μικρότερη τιμή της; Εκφράστε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας. Μπορείτε να γενικεύσετε αυτά τα συμπεράσματα για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

δ) Έχει η καθεμιά από τις παραπάνω παραβολές άξονα ή κέντρο συμμετρίας; Εκφράστε αλγεβρικά τις συμμετρίες αυτές. Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

ε) Από τι εξαρτάται το «άνοιγμα» μιας παραβολής και με ποιόν τρόπο;

στ) Παρατηρήστε τις παραβολές $y = αx^2$ και $y = -αx^2$. Είναι συμμετρικές μεταξύ τους;

Δ.30 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ6)

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $ψ = x^2$ και $ψ = x^2 + κ$ για διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ. Πώς μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $ψ = x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $\psi = x^2$ και $\psi = (x+\lambda)^2$ για διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ. Πώς μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $\psi = x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Αφού τη γράψετε στη μορφή $f(x) = (x+\lambda)^2 + \kappa$ προσπαθήστε να την παραστήσετε γραφικά ξεκινώντας από την $\psi = x^2$ με βάση τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προηγούμενα ερωτήματα.

δ) Σε ποιά διαστήματα η $f(\chi) = x^2 - 4x + 5$ είναι αύξουσα και σε ποιά φθίνουσα; Για ποιά τιμή του x παρουσιάζει η f ελάχιστη τιμή και ποιά είναι αυτή; Έχει η γραφική παράσταση της f άξονα συμμετρίας;

(Για την παραπάνω δραστηριότητα ενδείκνυται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας).

Δ.31 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ6)

Ένας μαθητής πειραματίζεται παριστάνοντας γραφικά συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$. Ως τιμές των α, β και γ διαλέγει διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής προόδου: 1, 2, 4, 8, 16, 32,….

α) Με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, να χαράξετε κάποιες γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να γενικεύσετε την παρατήρησή σας και να αποδείξετε την ισχύ της γενίκευσης αυτής;

β) Τι θα συμβεί αν με της ίδιας μορφής συναρτήσεις χρησιμοποιήσουμε άλλες γεωμετρικές προόδους; Μπορείτε να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας;

Δ.32 (αντιστοιχεί στο στόχο ΜΣ7)

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)= 2x^2-4x-6$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
φ(x)							

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(x).

γ) Με χρήση της παραπάνω γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε τις λύσεις των εξισώσεων $\varphi(x)=0$, $\varphi(x)=2$ και της ανίσωσης $\varphi(x)>0$.

δ) Να επιλύσετε αλγεβρικά τις $\varphi(x)=0$, $\varphi(x)=2$ και την $\varphi(x)>0$ και να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με εκείνες του ερωτήματος (γ).