

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

A2. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς **εύρος** ή **κύμανση**.

Μονάδες 4

A3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\text{συν}x) = \text{συν}x_0$

(μονάδες 2)

β) $(c f(x))' = c f'(x)$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων**.

(μονάδες 2)

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής X χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%

(μονάδες 2)

ε) Για τις σχετικές συχνότητες f_i , όπου $i = 1, 2, \dots, k$ των τιμών x_i μιας μεταβλητής X , ισχύει:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - \beta x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 9)$ και ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4} = \frac{1}{12\alpha}$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 6$

Μονάδες 9

B2. Για $\alpha = 2$ και $\beta = 6$ να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2+1} + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Αν x_1, x_2, x_3, x_4 είναι οι τιμές μιας

μεταβλητής X με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 , όπου:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad 1 < x_3 < x_4,$$

$$f_1 = g(x_1) - \frac{1}{3}, \quad f_2 = g(x_2) - \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad f_3 = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x)}{x-1}$$

Τότε :

Γ1. να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της g , η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°

Μονάδες 6

Γ2. να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ3. αν η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $y = x+1$ και σε αυτήν ανήκουν τα σημεία $M_k(x_k, y_k)$, όπου $k = 1, 2, 3, 4$ για τα οποία ισχύει

$$2\delta_{x_k} = \delta_{y_k} \quad \text{και} \quad R_{y_k} = 5$$

τότε να υπολογίσετε τις τιμές x_3 και x_4 της μεταβλητής X , όπου

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

δ_{x_k} : η διάμεσος των τετμημένων των σημείων M_k ,

δ_{y_k} : η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων M_k και

R_{y_k} : το εύρος των τεταγμένων των σημείων M_k

Μονάδες 5

Γ4. να υπολογίσετε τη μέση τιμή των τιμών x_1, x_2, x_3, x_4

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n ως προς μία ποσοτική μεταβλητή X και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c , όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
$[\alpha, \cdot)$				λ
$[\cdot, \cdot)$				$3\lambda + 10$
$[\cdot, \cdot)$				
$[\cdot, \cdot)$				$\kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10$
$[\cdot, \cdot)$				$\kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30$
Σύνολα				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_3 και F_5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2 - 8x + 3\kappa = 0, \text{ όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 30$, $f_3\% = 20$, $f_4\% = 30$ και $f_5\% = 10$

Μονάδες 5

Δ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 10$ και $c = 4$

(μονάδες 4)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)
Μονάδες 8

- Δ4.** Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:15

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ