

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\} \text{ και ισχύει } (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^v)} = (\overline{z})^v$, όπου v θετικός ακέραιος.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$

κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , w για τους οποίους ισχύουν:

- $|z - 3i|^2 - 18 = |z - 3|^2$
- $|w - i| = \operatorname{Im}(w) + 1$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση $x - y - 3 = 0$

Μονάδες 9

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 9

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , w να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , όπου $g(x) = \sqrt{f(x) - 2}$

Μονάδες 5

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2, x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

- Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός. Αν η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, τότε:

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = -12$.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) \geq \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

- Δ3.** Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^3 + 1}$ με $x \in (0, +\infty)$

Μονάδες 5

- Δ4.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^v} \eta\mu \left(\frac{1}{x^2} \right) \right)$$

για τις διάφορες ακέραιες τιμές του v .

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ