

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\zeta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον,  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \zeta$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της  $f$  με τη  $g$ , δηλαδή η συνάρτηση  $g \circ f$ , ορίζεται αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**β)** Ισχύει ότι  $|\eta\mu x| \leq |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**γ)** Ισχύει  $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ .

**δ)** Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ε) Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και  $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις  $f = \frac{g}{h}$  και  $r = g \cdot h$ .

**Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1.$$

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι  $f^{-1} = f$  (μονάδες 5), όπου  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $r$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να λύσετε την εξίσωση  $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^{\lambda}, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda, & x \geq 2, \end{cases}$$

με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 0$ .

**Μονάδες 5**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

**Μονάδες 6**

**Γ3. i)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα  $[0,3]$ .  
(μονάδες 4)

**ii)** Να βρείτε, αν υπάρχει,  $\xi \in (0,3)$  τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο  $\Gamma(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $\Delta(0, f(0))$  και  $E(3, f(3))$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Κινητό σημείο  $M$  ξεκινά από το σημείο  $A(2,0)$  και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα  $v=0,5$  μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν  $O$  είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία  $\hat{\omega} = \widehat{AOM}$  τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο  $M$  θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x},$$

όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

**Μονάδες 4**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα,  $x_0$ , η οποία ανήκει στο διάστημα  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ3. i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f(4)$  έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις  $x_1 = 2$  και  $x_2 = 4$ .

(μονάδες 3)

**ii)** Να λύσετε την ανίσωση  $2^x \leq x^2$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

(μονάδες 5)

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες  $x = -\ln 2$  και  $x = 0$ , και περικλείεται από αυτές, τον άξονα  $x'x$  και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)**

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ