

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 5**

**A3.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι “1-1”, αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

**β)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**γ)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .

**δ)** Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) .$$

**ε)** Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$  και

ισχύει  $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x} .$

**Μονάδες 10**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = 2 \ln(x-1)$$

και

$$g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2} + 1.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

**Μονάδες 8**

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι  $h(x) = \ln(x-2)$ ,  $x \in (2, +\infty)$ .

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h^{-1}$  (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**B3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

με  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .
- Η ευθεία  $y = x$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στην αρχή των αξόνων.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

- i)  $\kappa = 0$  και
- ii)  $\mu = 1$ .

**Μονάδες 8**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

**Γ2.** i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  (μονάδες

3) και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ , για

κάθε τιμή της παραμέτρου  $\alpha \in \mathbb{R}$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 11**

**Γ3.** Για  $v \in \mathbb{N}$  ορίζουμε  $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$ ,  $v \in \mathbb{N}$ .

ii) Να υπολογίσετε τα  $I_0, I_1$  και  $I_2$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $g'(x) \neq -1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_1 \in (-1, 0)$  ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0.$$

**Μονάδες 6**

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 3$ .

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  ισχύουν:

i)  $f(x) \geq 0$  και (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση  $3f(x) = \pi$  έχει ακριβώς μια ρίζα,  $x_2$ . (μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

**Δ4.** i) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 0$  στο διάστημα  $[x_1, 0]$ . (μονάδες 3)

ii) Έστω  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = x_1$  και  $x = f(x_2)$ , όπου  $x_1$  είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και  $x_2$  είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας  $y'y$  χωρίζει το  $\Omega$  σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3.$$

(μονάδες 7)

**Μονάδες 10**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**