ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^\nu)} = \left(\bar{z}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

β. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η ho(gof), τότε ορίζεται και η (hog)of και ισχύει ho(gof) = (hog)of

γ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x - 1}{x} = 1$

δ. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ ∈Δ, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

ε. Αν 0<α<1, τότε $\lim_{x \to -\infty} \alpha^{x} = 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω $w = z + \frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει w=2

Μονάδες 6

Β2. Αν $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ και $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β1, τότε να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

Μονάδες 6

Β3. Αν z_1 και z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 , z_2 και $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Μονάδες 8

Β4. Αν $|z| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x+1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

$$xf'(x) < f(x) + \ln 2 \text{ , για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2\int_0^x f(t)\,dt = \left(\ln(x+1)\right)^2 \text{ , } x > -1$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, $x > -1$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^e \le e^{x+1} \text{ , για κάθε } x > -1$$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = e-1$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow f(x) = f(1)\ ,\quad x > -1$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x+1)^2 = 2^{x+1}\ ,\quad x > -1$$

έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x=1$ και $x=3$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ