

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 5

A2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 10

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

β. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε $f \circ g = g \circ f$.

δ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ ισχύει $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο

διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ Β

Αν ο μιγαδικός αριθμός z είναι ρίζα της εξίσωσης $3x^2 + \alpha x + 3 = 0$,
 $\alpha \in \mathbb{R}$ με $-6 < \alpha < 6$, τότε:

B1. Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$.

Μονάδες 8

B2. Να αποδείξετε την ισότητα $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ (6 μονάδες) και να την ερμηνεύσετε γεωμετρικά (4 μονάδες).

Μονάδες 10

B3. Αν επιπλέον $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Γ1. Να βρείτε τις οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f , εάν υπάρχουν.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Μονάδες 9

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e$, $x = 2e$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = 2x e^{-x} - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(1) = e^{-1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = 2e^{x-2}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

Δ4. Δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(-1, f(-1))$ και να αποδείξετε ότι

$$f(x) + 2e + 3ex \geq 0 \text{ για κάθε } x \leq 0.$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ