

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β) .

β) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β) .

γ) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β) .

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β) .

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f

στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} .

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h .

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h .

Μονάδες 5

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x h(x) dx$.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm . Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:

Γ1. Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$

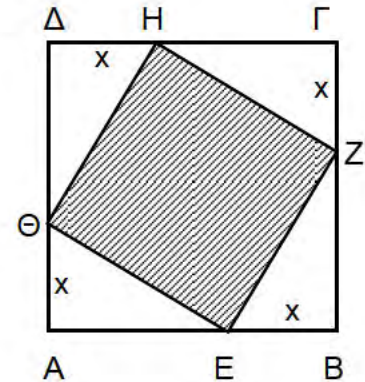
Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

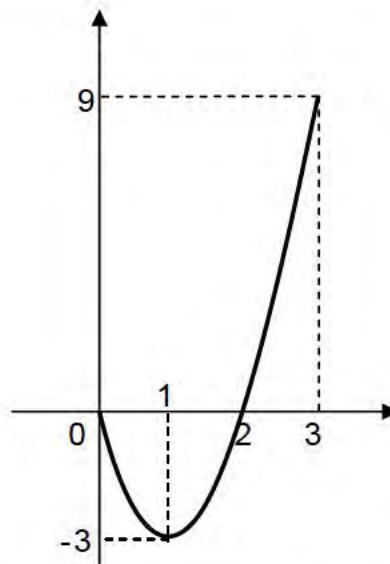
Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου $EZH\Theta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Δ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ