

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ**  
**ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = 1$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \eta \mu \frac{1}{x}) = 0$ .

**β)** Κάθε συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**γ)** Η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει ότι  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

**δ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ ,

$$\text{τότε ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = 2\ln x - 1$   
και η συνάρτηση  $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = x - 2$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

**Μονάδες 6**

Αν  $h(x) = 2\ln(x - 2) - 1$ ,  $x > 2$ , τότε:

**B2.** Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h$  βρίσκεται πάνω από την ευθεία  $y = 1$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφή της  $h^{-1}$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 7**

**B4.** Αν  $h^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{x+1}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = (h^{-1}(x) - 3) \cdot (x^3 - 8)$$

στο  $[-1, 2]$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f:[0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα (τοπικά και ολικά).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Με βάση τα ερωτήματα Γ1 και Γ2, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

**Μονάδες 7**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \lambda x, & x < -1 \\ \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}, & x \geq -1 \end{cases}, \text{ όπου } \alpha > 1 \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$  (μονάδες 5) και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(-1, 0)$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ