

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 2**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

**Μονάδες 6**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα  $x'x$ , της γραφικής παράστασης της  $f$

**β)** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών  $\alpha + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

**γ)** Για την πολυωνυμική συνάρτηση  
$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0 \quad \text{με } \alpha_n \neq 0$$
  
ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \alpha_0$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Λ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

- δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$
- ε) Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , με  $z \neq -1$ , για τους οποίους ο αριθμός  $w = \frac{z-1}{z+1}$  είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

**B1.**  $|z|=1$

**Μονάδες 9**

**B2.**  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  και ότι ο αριθμός  $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 8**

**B3.**  $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$ , όπου  $z_1, z_2$  δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha & , x < 1 \\ (x - \beta)^2 & , x \geq 1 \end{cases}$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

η οποία είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\beta^2 - 2\beta = \alpha$  και ότι  $\alpha \geq -1$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Αν είναι  $-1 \leq \alpha \leq 1$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $[-1, 1]$

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ , να βρείτε τα  $a$  και  $\beta$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν  $\alpha = \frac{5}{4}$  και  $\beta = -\frac{1}{2}$ , να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(1, f(1))$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(-1, 1)$  συνάρτηση  $f$  με  $f(0) = -3$  και η συνάρτηση  $g(x) = \frac{1}{1-x^2} f(x)$ ,  $x \in (-1, 1)$  με

$$g(x) \leq \beta x - 3, \quad x \in (-1, 1), \quad \text{όπου } \beta \in \mathbb{R}$$

Δίνεται επιπλέον ότι η παράγωγος  $f'$  της  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-1, 1)$

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**Δ1.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  έχουν κοινό σημείο με τετμημένη  $x_0 = 0$  και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να δείξετε ότι  $g'(0) = \beta$  και ότι η κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο κοινό τους σημείο με τετμημένη  $x_0 = 0$  είναι η  $y = \beta x - 3$

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f'(x) = \beta$ ,  $x \in (-1, 1)$ , έχει μοναδική ρίζα το 0

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Να δείξετε ότι  $f(x) \geq \beta x - 3$ , για κάθε  $x \in (-1, 1)$

**Μονάδες 7**

**ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**