

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ**  
**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑΣ Β')**  
**ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2010**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ**  
**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

**A2.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**A3.** Για καθεμιά από τις επόμενες πέντε (5) προτάσεις, *α. έως ε., να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη  $\Sigma$ , αν η πρόταση είναι Σωστή, ή  $\Lambda$ , αν αυτή είναι Λανθασμένη.*

*α.* Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης  $f$  είναι το σύνολο  $A$  των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης.

*β.* Για κάθε συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και για κάθε πραγματικό αριθμό  $c$ , ισχύει ότι:

$$(cf(x))' = f'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

*γ.* Αν  $z_1, z_2$  μιγαδικοί αριθμοί με  $z_2 \neq 0$ , τότε ισχύει ότι:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

*δ.* Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  είναι το κλειστό διάστημα  $[m, M]$ , όπου  $m$  η ελάχιστη και  $M$  η μέγιστη τιμή της.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ε. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω ο μιγαδικός αριθμός  $z = x + yi$  με  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Αν ισχύει ότι  $2z - i\bar{z} = 3$ , τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό  $z$ .

**Μονάδες 8**

**B2.** Αν  $z = 2 + i$ , τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  για τους οποίους ισχύει ότι:  $|w + z| = |z^2|$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Αν  $z = 2 + i$  και  $u = \frac{\bar{z} + iz}{\bar{z} - 1}$ , τότε να αποδείξετε ότι:  $u^{2010} = -1$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 3x + \sin x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

**Μονάδες 10**

**Γ3.** Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x^2 + 8) = f(6x)$

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x}$

**Μονάδες 5**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x} + 2x$ ,  $x \neq 0$ . Να βρείτε:

**Δ1.** Τα τοπικά ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Το σημείο  $M(\xi, f(\xi))$ ,  $\xi > 0$ , της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$ , στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  με  $A(1, f(1))$ ,  $B(3, f(3))$ .

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ